MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
MÜNSTER

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

12. BAND 3./4. HEFT

(AUSGEGEBEN AM 29. MÄRZ 1922)

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1922

Some problems of 'Partitio Numerorum': IV. The singular series in Waring's Problem and the value of the number $G(k)$.

By

G. H. Hardy in Oxford and J. E. Littlewood in Cambridge.

1. Introduction.

1. 1. In this memoir we continue the investigations initiated in two earlier memoirs bearing a similar title, and complete the proof of all the assertions which they contain[1]). We shall assume throughout that the reader is acquainted with the notation and terminology of these memoirs.

The fundamental theorem of Hilbert[2]) asserts the existence of the numbers $g(k)$ and $G(k)$. In our first memoir we proved that, if

$$a = \frac{1}{k}, \qquad K = 2^{k-1}, \qquad \varkappa = 1 - \frac{1}{K}, \qquad s > 2K + 1,$$

then

$$r_{k,s}(n) = C n^{sa-1} S + O(n^{sa\varkappa+\varepsilon}), \tag{1. 11}$$

where S is the 'singular series'

$$S = \sum \left(\frac{S_{p,q}}{q}\right)^s e_q(-np). \tag{1. 12}$$

[1]) G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some problems of 'Partitio Numerorum': I. A new solution of Waring's Problem, Göttinger Nachrichten 1920, S. 33—54; II. Proof that every large number is the sum of at most 21 biquadrates, Mathematische Zeitschrift 9 (1921), S. 14—27.

The third memoir of the series (Some problems of 'Partitio Numerorum': III. On the expression of a number as a sum of primes) will appear shortly in the Acta Mathematica. The problems considered in this memoir are of a somewhat different character. We refer to these memoirs as P. N. 1, P. N. 2, P. N. 3.

[2]) D. Hilbert, Beweis für die Darstellbarkeit der ganzen Zahlen durch eine feste Anzahl n-ter Potenzen, Göttinger Nachrichten 1909, S. 17—36: reprinted with certain changes in Mathematische Annalen, 67 (1909), S. 281—300.

The sum of the series is positive, and indeed greater than $\frac{1}{2}$, if s is sufficiently large; and $sa\varkappa < sa - 1$ if $s > kK$. Thus

$$r_{k,s}(n) \sim C n^{sa-1} S, \tag{1.13}$$

as $n \to \infty$, for all large enough values of s, say for $s \geqq G_1(k)$. It is plain that Hilbert's theorem follows as a corollary.

Important simplifications of our method have been effected by Landau[3]) and Weyl[4]). These improvements relate to our treatment of the 'major arcs'. In particular Weyl has shown that, if we are concerned with an existence theorem only, so that it is not important to obtain the best possible upper bound for $G(k)$, the rather difficult analysis which we used may be replaced by an argument of a much more elementary character.

We proved nothing in this memoir about the values of $G_1(k)$ or $G(k)$, though our analysis suggested very forcibly that

$$G(k) \leqq G_1(k) \leqq kK + 1 = s_0. \tag{1.14}$$

In order to prove this it is necessary to examine the singular series more closely, and to prove that

$$S > \sigma = \sigma(k, s) > 0 \tag{1.15}$$

for $s \geqq s_0$. This would be sufficient; but in fact, as Herr Ostrowski has shown[5]), the truth of (1.15) for $s = s_0$ will involve

$$S > \sigma = \sigma(k) > 0 \tag{1.151}$$

(the value of σ being independent of s) for $s \geqq s_0$. In our second memoir, however, we effected an improvement in (1.11), showing that

$$r_{k,s}(n) = C n^{sa-1} S + O(n^{(s-4)a\varkappa+2a+\varepsilon}) \tag{1.16}$$

(a better result if only $k > 2$). If now we can prove that (1.15), and therefore (1.151), is true for $s > (k-2)K + 4$, we shall have proved that

$$G(k) \leqq G_1(k) \leqq (k-2)K + 5. \tag{1.17}$$

This we proved before when $k = 4$, in some ways the most interesting case. It is the general proof of (1.17) that is our primary object now.

---

[3]) E. Landau, Zur Hardy-Littlewoodschen Lösung des Waringschen Problems, Göttinger Nachrichten 1921, S. 88–92.

[4]) H. Weyl, Bemerkung zur Hardy-Littlewoodschen Lösung des Waringschen Problems, Göttinger Nachrichten 1922.

[5]) A. Ostrowski, Bemerkung zur Hardy-Littlewoodschen Lösung des Waringschen Problems, Mathematische Zeitschrift, 9 (1921), S. 28–34. We return to this point in § 6.3.

Our principal theorem then, will be:

Theorem 1. *There is a positive number* $\sigma = \sigma(k, s)$ *such that* $S > \sigma$ *for* $s \geqq (k-2)K + 5$, *so that*

$$r_{k,s}(n) \sim Cn^{sa-1}S$$

for all such values of s. *In particular,* $r_{k,s}(n)$ *is positive for all such values of* s *and all sufficiently large values of* n, *so that*

$$G(k) \leqq (k-2)K + 5.$$

1. 2. We have in any event to undertake a detailed examination of the singular series; and we shall push our analysis a good deal further than is necessary for our immediate purpose. We do so primarily because the analysis is interesting in itself. But it must be remembered also that the inequality (1. 17) is, in all probability, far short of the actual truth. It is not unlikely that the order of the error term in (1. 16), which is the obstacle to further progress at present, may before long be materially reduced. The discussion of the singular series, for values of s smaller than those contemplated in Theorem 1, will then become of immediate importance, as every improvement in (1. 16) will give a corresponding improvement in the value of $G(k)$.

It may be useful if we summarise at this stage the existing state of knowledge as regards the values of $g(k)$ and $G(k)$. This is exhibited in the following table.

$k=$	2	3	4	5	6	7	8
$g(k) \leqq$	4	9	37	58	478	3806	31353
$g(k) \geqq \left[\left(\frac{3}{2}\right)^k\right] + 2^k - 2 =$	4	9	19	37	73	143	279
$G(k) \leqq$	4	8	37	58	478	3806	31353
$G(k) \leqq (k-2)\,2^{k-1} + 5 =$	(5)	(9)	21	53	133	325	773
$G(k) \geqq$	4	4	16	6	9	8	32

The numbers in the first line are the upper bounds for $g(k)$ which have been obtained by elementary arguments, and are due in order to Lagrange, Wieferich, Wieferich, Baer, Baer, Wieferich, and Kempner respectively[6]). Those in the third line are the corresponding

[6]) The names are those of the authors who found the actual numbers quoted. The proofs of 'Waring's Theorem' for the cases in question are due to Lagrange, Maillet, Liouville, Maillet, Fleck, Wieferich, and Hurwitz (and Maillet) respectively. For detailed references see A. J. Kempner, Über das Waringsche Problem und einige Verallgemeinerungen. Inaugural-Dissertation, Göttingen 1912, and W. S. Baer, Beiträge zum Waringschen Problem, Inaugural-Dissertation,

upper bounds for $G(k)$, and are identical with the numbers in the first except when $k=3$. The inequality $G(3) \leqq 8$ is due to Landau[7]).

The fourth line contains the upper bounds given by Theorem 1. It will be observed that the numbers for $k=2$ and $k=3$ are inferior to those already known, but that there is a very substantial improvement for all larger values of k.

The second and fifth lines contain the best known lower bounds for $g(k)$ and $G(k)$ respectively. It was observed by Euler, and later by Bretschneider[8]), that the number $2^k l - 1$, where l is determined by

$$3^k = 2^k l + m, \qquad 0 < m < 2^k,$$

requires $l + 2^k - 2$ powers; and this observation gives the numbers tabulated. The numbers 4, 9, 19 are mentioned by Waring, but there is nothing to show that he had recognised the general law[9]).

The numbers in the fifth line are more interesting and require further explanation. It was proved by Hurwitz[10]) and Maillet[11]) that

$$G(k) \geqq k+1$$

for every k; and in some cases, *e. g.* for $k=3$, 5 and 7, no more than this is known.

In other cases it is possible to prove a good deal more by the consideration of simple congruence relations. The simplest case is $k=4$. Every biquadrate is congruent to 0 or to 1 to modulus 16, so that a number $16m+15$ requires at least 15 biquadrates. Thus (as was observed by Landau) $G(k) \geqq 15$, and Kempner, considering numbers $16^\beta . 31$,

---

Göttingen 1913. The numbers for $k=7$ and $k=8$ could no doubt be substantially reduced.

Proofs of the existence of $g(k)$, from which an upper bound for $g(k)$ could be calculated, have also been given for $k=10$ (I. Schur), $k=12$ (Kempner) and $k=14$ (Kempner).

[7]) E. Landau, Über eine Anwendung der Primzahltheorie auf das Waringsche Problem in der elementaren Zahlentheorie, Mathematische Annalen, **66** (1909), S. 102—105.

[8]) See Kempner, loc. cit., S. 44—45.

[9]) Waring asserts quite explicitly, not merely that $g(k)$ exists, but that $g(2)=4$, $g(3)=9$, $g(4)=19$, 'et sic deinceps'. Nothing is known, so far as we are aware, inconsistent with the view that the numbers in question are the actual values of $g(k)$ for every k.

[10]) A. Hurwitz, Über die Darstellung der ganzen Zahlen als Summen von n-ter Potenzen ganzer Zahlen, Mathematische Annalen, **65** (1908), S. 424—427.

[11]) E. Maillet, Sur la décomposition d'un entier en une somme de puissances huitièmes d'entiers, Bulletin de la société mathématique de France, **36** (1908), p. 69–77.

where β is large, improved this inequality to $G(4) \geqq 16$. He also proved that $G(k) \geqq 4k$ whenever k is a power of 2, and that $G(6) \geqq 9$. This is the origin of the remaining numbers in our table. Again, every ninth power is congruent to 0, 1, or -1, to modulus 27, so that a number $27m \pm 13$ requires at least 13 ninth powers: thus $G(9) \geqq 13$.

Considerations of this character concerning cubes lead only to the Hurwitz-Maillet inequality; and when $k = 5$ or $k = 7$ the resulting inequalities are entirely trivial, for any residue to modulus 25 can be generated by 3 fifth powers, and any residue to modulus 49 by 4 seventh powers. It will be found that these simple facts have a very interesting bearing on the structure of our singular series.

2. The formal theory of the singular series.

2. 1. The singular series is absolutely convergent for sufficiently large values of s,[12]) and is then expressible as an infinite product

$$(2.11) \qquad \mathfrak{S} = 1 + A_2 + A_3 + \ldots = \sum A_q = \chi_2 \chi_3 \chi_5 \ldots = \Pi \chi_\pi,$$

where π is a prime and

$$(2.12) \qquad \chi_\pi = 1 + A_\pi + A_{\pi^2} + \ldots = \sum A_{\pi^\lambda}.^{13})$$

The sum χ_π is a finite sum, for A_{π^λ} is always zero from a certain value of λ onwards[14]).

The question of the absolute convergence of the series and product will be discussed more precisely later. Our immediate object is to determine the form of the factors χ_π.

2. 2. We suppose that $q = \pi^\lambda (\lambda \geqq 1)$, and we denote by $\nu(\xi, q, n)$ the number of solutions of the congrence

$$(2.21) \qquad \sum_{r=1}^{s} x_r^k \equiv n \pmod{q}$$

for which

$$(2.211) \qquad 0 \leqq x_r < \xi \qquad (r = 1, 2, \ldots, s).$$

We write

$$(2.22) \qquad \nu(q, q, n) = M(q, n) = M(q).^{15})$$

Finally, we denote by

$$(2.23) \qquad N(q, n) = N(q)$$

---

[12]) P. N. 1, S. 40.

[13]) P. N. 2, S. 18.

[14]) P. N. 2, S. 22 (f. n. 7). This will also appear incidentally later (S. 374).

[15]) When it is unnecessary to show explicitly the dependence of M on n.

the number of solutions of (2.21) for which $0 \leqq x_r < q$ $(r \leqq s)$, and for which not every x is divisible by π. Such a solution we may call a *primitive* solution.

Following Landau, we write '$y \mid z$' and '$y + z$' for 'z is divisible by y' and 'z is not divisible by y'. We shall find it convenient, moreover, to have a special notation to express '$y^r \mid z$, $y^{r+1} + z$', *i. e.* 'y^r is the highest power of y that divides z'. In these circumstances we shall write '$y^r \mid z$'.

This being so, the value of χ_π is given, in terms of the numbers N, by the following theorem.

Theorem 2. *Suppose that*

$$k > 2, \qquad \pi^\theta \mid k \quad (\theta \geqq 0), \qquad (\pi^k)^\beta \mid n \quad (\beta \geqq 0),^{16} \tag{2.24}$$

and let

$$\varphi = \theta + 1 \quad (\pi > 2), \qquad \varphi = \theta + 2 \quad (\pi = 2). \tag{2.25}$$

Then

$$\chi_\pi = B\pi^{\varphi(1-s)} N(\pi^\varphi, 0) + \pi^{\beta(k-s)+\varphi(1-s)} N\left(\pi^\varphi, \frac{n}{\pi^{\beta k}}\right), \tag{2.26}$$

where

$$B = 0 \qquad (\beta = 0), \tag{2.2611}$$

$$B = 1 + \pi^{k-s} + \pi^{2(k-s)} + \pi^{(\beta-1)(k-s)} \qquad (\beta > 0). \tag{2.2612}$$

The proof of this theorem rests on a series of lemmas.

2.3. Lemma 1. *If*

$$\pi^\theta \mid k \quad (\theta \geqq 0), \qquad q = \pi^\lambda, \qquad \lambda > \theta + 1 \quad (\pi > 2), \qquad \lambda > \theta + 2 \quad (\pi = 2),$$

$$x = \xi + \alpha\pi^{\lambda-\theta-1}, \tag{2.31}$$

then

$$x^k \equiv \xi^k + \frac{k}{\pi^\theta}\alpha\xi^{k-1}\pi^{\lambda-1} \pmod{q}. \tag{2.32}$$

We have

$$x^k = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \alpha^r \xi^{k-r} \pi^{r(\lambda-\theta-1)}.$$

The terms $r = 0, 1$ are those which occur in (2.32).

Suppose then $r \geqq 2$. The index of the highest power of π that divides $r!$ is

$$\left[\frac{r}{\pi}\right] + \left[\frac{r}{\pi^2}\right] + \ldots < \frac{r}{\pi - 1}.$$

---

[16]) $(\pi^k)^\beta \mid n$ means, of course, $\pi^{\beta k} \mid n$, $\pi^{(\beta+1)k} + n$. Its meaning is different from that of $\pi^{\beta^k} \mid n$, which would mean $\pi^{\beta^k} \mid n$, $\pi^{\beta^k+1} + n$.

Hence the r-th term is divisible by π^c, where

$$c > \theta - \frac{r}{\pi-1} + r(\lambda - \theta - 1) = \lambda + \frac{\pi-2}{\pi-1} r + (r-1)(\lambda - \theta - 2) - 2.$$

If $\pi > 2$, $c - \lambda > \frac{1}{2} r - 2 \geqq -1$. If $\pi = 2$, $\lambda \geqq \theta + 3$, and so $c - \lambda > r - 1 - 2 \geqq -1$. In either case $c - \lambda > -1$, or $c - \lambda \geqq 0$.

2.4. Lemma 2: $\sum_{\lambda=0}^{\mu} A_{\pi^\lambda}(n) = \pi^{\mu(1-s)} M(\pi^\mu, n)$.

Writing, as usual, $q = \pi^\lambda$, we have

$$A_q = A_q(n) = \sum_p \left(\frac{S_{p,q}}{q}\right) e_q(-np)$$

$$= q^{-s} \sum_p \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s = 0}^{q-1} e_q(p(x_1^k + x_2^k + \ldots + x_s^k - n)) = q^{-s} \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_s} c_q(X),$$

where $X = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_s^k - n$ and $c_q(X)$ is Ramanujan's sum[17])

$$c_q(X) = \sum_p e\ (pX).$$

If $\lambda = 1$,

$$q = \pi,\ c_\pi(X) = -1\ \ (\pi + X),\ c_\pi(X) = \pi - 1\ \ (\pi \mid X),$$

and

(2.41) $$A_\pi = \pi^{-s}\left(\sum_x (-1) + \sum_{\pi \mid X} \pi\right) = \pi^{-s}(-\pi^s + \pi M(\pi)) = \pi^{1-s} M(\pi) - 1.$$

If $\lambda > 1$,

$$c_{\pi^\lambda}(X) = 0\ \ (\pi^{\lambda-1} + X),\ \ c_{\pi^\lambda}(X) = -\pi^{\lambda-1}\ \ (\pi^{\lambda-1} \mid X),$$

$$c_{\pi^\lambda}(X) = \pi^{\lambda-1}(\pi - 1)\ \ (\pi^\lambda \mid X),$$

$$A_{\pi^\lambda} = \pi^{-\lambda s}\left(\sum_{\pi^{\lambda-1} \mid X} (-\pi^{\lambda-1}) + \sum_{\pi^\lambda \mid X} \pi^\lambda\right)$$

$$= \pi^{\lambda - \lambda s} M(\pi^\lambda) - \pi^{\lambda - \lambda s - 1} \nu(\pi^\lambda, \pi^{\lambda-1}, n).$$

If now

$$x_r = \xi_r + \alpha_r \pi^{\lambda-1}\ \ (0 \leqq \xi_r < \pi^{\lambda-1},\ 0 \leqq \alpha_r < \pi),$$

we have

$$\sum x_r^k \equiv \sum \xi_r^k \pmod{\pi^{\lambda-1}},$$

and so

$$\nu(\pi^\lambda, \pi^{\lambda-1}, n) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s} \nu(\pi^{\lambda-1}, \pi^{\lambda-1}, n) = \pi^s M(\pi^{\lambda-1}),$$

(2.42) $$A_{\pi^\lambda} = \pi^{\lambda(1-s)} M(\pi^\lambda) - \pi^{(\lambda-1)(1-s)} M(\pi^{\lambda-1}).$$

---

[17]) See S. Ramanujan, On certain trigonometrical sums and their applications in the theory of numbers, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 22 (1918), pp. 259–276; G. H. Hardy, Note on Ramanujan's function $c_q(n)$, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 20 (1921), pp. 263–271; and P. N. 3.

The lemma follows from (2.41) and (2.42). As corollaries we have

Lemma 3: $\chi_\pi \geqq 0$.

Lemma 4: *If n is representable in any manner as a sum of s (positive, negative, or zero) k-th powers, then $\chi_\pi > 0$.*

Lemma 3 is an immediate consequence of Lemma 2. To prove Lemma 4 we have only to observe that $A_{\pi^\lambda} = 0$ from a certain value of λ onwards[18]), and that, under the hypothesis of the lemma, $M(\pi^\lambda) > 0$ for every λ.

2.5. Lemma 5. *If $\pi^\theta | k$ $(\theta \geqq 0)$, then*

$$N(\pi^\mu, m) = \pi^{(\mu-\varphi)(s-1)} N(\pi^\varphi, m), \tag{2.51}$$

where φ is defined as in Theorem 2, $\mu \geqq \varphi$, and m is arbitrary.

We may suppose $\mu > \varphi$, and write

$$x_r = \xi_r + \alpha_r \pi^{\mu-\theta-1} \quad (0 \leqq \xi_r < \pi^{\mu-\theta-1},\ 0 \leqq \alpha_r < \pi^{\theta+1}). \tag{2.52}$$

Let $k = \pi^\theta k_0$. Then $(k_0, \pi) = 1$. Also

$$x_r^k \equiv \xi_r^k + k_0 \alpha_r \xi_r^{k-1} \pi^{\mu-1} \pmod{\pi^\mu}, \tag{2.53}$$

by Lemma 1. If now

$$m = m_1 + m_2 \pi^{\mu-1} \qquad (0 \leqq m_1 < \pi^{\mu-1}), \tag{2.54}$$

the congruence

$$\sum x_r^k \equiv m \pmod{\pi^\mu,\ 0 \leqq x_r < \pi^\mu}, \tag{2.55}$$

s equivalent to the pair of congruences

$$\sum \xi_r^k = m_1 \equiv m \pmod{\pi^{\mu-1},\ 0 \leqq \xi_r < \pi^{\mu-\theta-1}}, \tag{2.551}$$

and

$$\sum k_0 \alpha_r \xi_r^{k-1} \equiv m_2 - \frac{\sum \xi_r^k - m_1}{\pi^{\mu-1}} \pmod{\pi,\ 0 \leqq \alpha_r < \pi^{\theta+1}}. \tag{2.552}$$

In what follows we take into consideration only primitive solutions of (2.55) and (2.551). In such a solution of (2.551) some ξ, say ξ_1, is not divisible by π. This being so, the values of $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ in (2.552) may be assigned arbitrarily, and then, since $(k_0 \xi_1^{k-1}, \pi) = 1$, the value of α_1 will be determined uniquely to modulus π. There will therefore be π^θ possible values of α_1 less than $\pi^{\theta+1}$, and $\pi^\theta (\pi^{\theta+1})^{s-1} = \pi^{(\theta+1)s-1}$ sets of α's associated with every solution of (2.551). That is to say we have

$$N(\pi^\mu, m) = \pi^{(\theta+1)s-1} N_1, \tag{2.56}$$

[18]) See S. 369, footnote [14]).

where $N(\pi^\mu, m)$ is the number of primitive solutions of (2.55) and N_1 the number of primitive solutions of (2.551).

Again, $N(\pi^{\mu-1}, m)$ is the number of primitive solutions of

$$\sum x_r^k \equiv m \pmod{\pi^{\mu-1}},\quad 0 \leqq x_r < \pi^{\mu-1}. \tag{2.57}$$

If here we write

$$x_r = \xi_r + \alpha_r \pi^{\mu-\theta-1} \quad (0 \leqq \xi_r < \pi^{\mu-\theta-1},\ 0 \leqq \alpha_r < \pi^\theta),$$

and use Lemma 1 and the hypothesis $\mu > \varphi$, we obtain

$$x_r^k \equiv \xi_r^k \pmod{\pi^{\mu-1}}.$$

Hence

$$N(\pi^{\mu-1}, m) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s} N_1 = \pi^{\theta s} N_1. \tag{2.58}$$

From (2.56) and (2.58) we deduce

$$N(\pi^\mu, m) = \pi^{s-1} N(\pi^{\mu-1}, m) \qquad (\mu > \varphi), \tag{2.59}$$

and the lemma follows immediately.

Proof of Theorem 2.

2.61. Let ν be the integer such that $\pi^{\beta k+\nu} \mid n$, so that $0 \leqq \nu < k$; let

$$\lambda_0 = \mathrm{Max}(\beta k + \nu + 1, \beta k + \varphi); \tag{2.611}$$

and suppose that $\lambda \geqq \lambda_0$.

We divide the solutions (primitive or imprimitive) of

$$\sum x_r^k \equiv n \pmod{\pi^\lambda},\quad 0 \leqq x_r < \pi^\lambda), \tag{2.612}$$

into classes as follows. In the first class we put the primitive solutions, $N(\pi^\lambda, n)$ in number; in the second class the solutions in which every x is divisible by π but not every x by π^2; in the third those in which every x is divisible by π^2 but not every x by π^3; and so on.

The second class of solutions is correlated with the class of primitive solutions of

$$\sum y_r^k \equiv \frac{n}{\pi^k} \pmod{\pi^{\lambda-k}},\quad 0 \leqq y_r < \pi^{\lambda-1}). \tag{2.613}$$

If we write

$$y_r = \xi_r + \alpha_r \pi^{\lambda-k} \quad (0 \leqq \xi_r < \pi^{\lambda-k},\ 0 \leqq \alpha_r < \pi^{k-1}),$$

then

$$\sum y_r^k \equiv \sum \xi_r^k \pmod{\pi^{\lambda-k}},$$

and the number of primitive solutions of (2.613) is plainly $\pi^{(k-1)s}$ times the number of similar solutions of

$$\sum \xi_r^k \equiv \frac{n}{\pi^k} \pmod{\pi^{\lambda-k}},\quad 0 \leqq \xi_r < \pi^{\lambda-k}),$$

or is

$$\pi^{(k-1)s}\, N\left(\pi^{\lambda-k},\ \frac{n}{\pi^k}\right).$$

Similarly the number of solutions of the $(\alpha+1)$-th class, where $\alpha \leqq \beta$, is

$$\pi^{\alpha(k-1)s}\, N\left(\pi^{\lambda-\alpha k},\ \frac{n}{\pi^{\alpha k}}\right). \tag{2.615}$$

There are no solutions of any higher class, since $(\beta+1)k \geqq \beta k+\nu+1$ and $\pi^{\beta k+\nu+1} \nmid n$. Hence, if $\lambda \geqq \beta k+\nu+1$, and so certainly if $\lambda \geqq \lambda_0$, we have

$$M(\pi^\lambda, n) = \sum_{\alpha=0}^{\beta} \pi^{\alpha(k-1)s}\, N\left(\pi^{\lambda-\alpha k},\ \frac{n}{\pi^{\alpha k}}\right). \tag{2.616}$$

2.62. Again, if $\lambda - \alpha k \geqq \varphi$, and so certainly if $\lambda \geqq \lambda_0$ and $\alpha \leqq \beta$, we have, by Lemma 5,

$$N\left(\pi^{\lambda-\alpha k},\ \frac{n}{\pi^{\alpha k}}\right) = \pi^{(\lambda-\alpha k-\varphi)(s-1)}\, N\left(\pi^{\varphi},\ \frac{n}{\pi^{\alpha k}}\right). \tag{2.621}$$

Making this substitution in (2.616), and multiplying by $\pi^{\lambda(1-s)}$, we obtain

$$\begin{aligned} \pi^{\lambda(1-s)} M(\pi^\lambda, n) &= \sum_{\alpha=0}^{\beta} \pi^{\lambda(1-s)} \cdot \pi^{\alpha(k-1)s} \cdot \pi^{(\lambda-\alpha k-\varphi)(s-1)}\, N\left(\pi^{\varphi},\ \frac{n}{\pi^{\alpha k}}\right) \\ &= \sum_{\alpha=0}^{\beta} \pi^{\alpha(k-s)+\varphi(1-s)}\, N\left(\pi^{\varphi},\ \frac{n}{\pi^{\alpha k}}\right). \end{aligned} \tag{2.622}$$

If $\alpha < \beta$ and $\varphi \leqq k$, $\frac{n}{\pi^{\alpha k}}$ is divisible by π^φ, and we may replace it in N by 0. If $\pi > 2$, $\varphi = \theta+1 \leqq 2^\theta \leqq \pi^\theta \leqq k$. If $\pi = 2$, $\varphi = \theta+2 \leqq 2^\theta \leqq k$ unless $\theta = 0$ or $\theta = 1$, in which cases $\varphi \leqq 3 \leqq k$. Hence we may replace every N in (2.622), except that for which $\alpha = \beta$, by 0.

It follows that the right hand side of (2.622), is equal, when $\lambda \geqq \lambda_0$, to the value for χ_π given in Theorem 2. It is also independent of λ, and therefore, by Lemma 2, equal to

$$\lim_{\lambda\to\infty} \pi^{\lambda(1-s)} M(\pi^\lambda, n) = \chi_\pi. \tag{2.623}$$

This completes the proof of the theorem. We may observe that we have shown incidentally that

$$A_{\pi^\lambda} = 0 \qquad (\lambda > \lambda_0). \tag{2.624}$$

3. Some properties of the sums $S_{p,q}$.

3.1. In this section we establish certain properties of the Gaussian sums

$$S_{p,q} = S_{p,q,k} = \sum_{j=0}^{q-1} e_q(j^k p) \tag{3.11}$$

which will be useful for the further study of the singular series[19]). We have not attempted to make the theory complete, though we have developed it a little further than is absolutely necessary.

We denote by

$$\chi = \chi_\varkappa = \chi_\varkappa(m) \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq h = \varphi(q))$$

the h Dirichlet's ‚characters' to modulus q.[20]) χ_1 is the principal character, and $\bar{\chi}_\varkappa$ is the character conjugate to $\chi_\varkappa$. We shall be concerned only with the case $q = \pi^\lambda$, where $\pi > 2$ and $\lambda \geqq 1$.

It will be convenient to write

$$S'_{p,q} = \sum_{j=0}^{q-1} \chi_1(j)\, e_q(j^k p) = \sum_{(j,q)=1} e_q(j^k p). \tag{3.12}$$

It is plain that, if $\lambda \leqq k$,

$$S_{p,q} = S'_{p,q} + \sum_{\pi \mid j} 1 = S'_{p,q} + \pi^{\lambda-1}. \tag{3.13}$$

3.2. Lemma 6. *If* $(l, q) = 1$ *then*

$$\sum_{\varkappa} \bar{\chi}_\varkappa(l)\, \chi_\varkappa(m) = 0$$

unless $m \equiv l \pmod q$, *in which case the sum is* h.

The result is obvious if $(m, q) > 1$. If $(m, q) = 1$, we determine m from the congruence $mm' \equiv 1 \pmod q$. We have then

$$\bar{\chi}_\varkappa(l)\, \chi_\varkappa(m) = \bar{\chi}_\varkappa(l)\, \bar{\chi}_\varkappa(m') = \bar{\chi}_\varkappa(lm'),$$

and

$$\sum_{\varkappa} \bar{\chi}_\varkappa(lm') = 0$$

unless $lm' \equiv 1$ or $m \equiv l$, in which case the sum is h.

---

[19]) What we do is, in effect, to develop from our own point of view certain portions of the theory of the division of the circle (*Kreisteilung*). It is not unlikely that the substance of our analysis is to be found elsewhere; but it is not altogether easy to extract, from the classical accounts of the theory, the particular parts which we require.

[20]) A systematic account of the theory will be found in Landau's *Handbuch*, 1 (Zweites Buch).

We write

$$\delta = (h, k) = (\varphi(q), k) = (\pi^{\lambda-1}(\pi - 1), k). \tag{2.21}$$

3.3. Lemma 7. *There are just δ characters $\chi_\varkappa$ which possess the property*

$$\chi_\varkappa^k = \chi_1. \tag{3.31}$$

These characters are given by

$$\chi_\varkappa(l) = e\left(\frac{\varrho z}{\delta}\right), \tag{3.32}$$

where $\varrho = 0, 1, 2, \ldots, \delta - 1$ and z is the index of l.

We have generally

$$\chi_\varkappa(l) = e\left(\frac{yz}{h}\right), \tag{3.33}$$

where y is the index which specifies $\varkappa$.[21]) The necessary and sufficient condition for (3.31) is that $kyz \equiv 0 \pmod h$ for every z, or that

$$ky \equiv 0 \pmod h. \tag{3.34}$$

From (3.34) we deduce

$$\frac{ky}{\delta} \equiv 0 \pmod{\frac{h}{\delta}}, \tag{3.35}$$

which has the single solution $y \equiv 0$ to modulus $\frac{h}{\delta}$. Thus (3.35) has the δ solutions

$$y \equiv \frac{\varrho h}{\delta} \qquad (\varrho = 0, 1, \ldots, \delta - 1)$$

to modulus h. These are all solutions of (3.34), and are plainly the only solutions.

We shall call the characters $\chi' = \chi_{\varkappa'}$ which satisfy (3.31) the *special* characters. It is clear that $\bar\chi_{\varkappa'}$ is a special character.

Lemma 8. *We have*

$$\sum_{\varkappa'} \bar\chi_{\varkappa'}(l) = 0 \ (\delta \nmid z), \qquad \sum_{\varkappa'} \bar\chi_{\varkappa'}(l) = \delta \ (\delta \mid z). \tag{3.36}$$

For

$$\sum_{\varkappa'}{}' \bar\chi_{\varkappa'}(l) = \sum_{\varrho=0}^{\delta-1} e\left(-\frac{\varrho z}{\delta}\right).$$

Lemma 9. *Suppose that $q = \pi^\lambda$ $(\lambda > 1)$, and that $k \mid \pi - 1$, so that $\delta = k$. Then*

$$\sum_l e_q(lp) = 0, \tag{3.37}$$

[21]) Landau, S. 401–402.

if $(p, q) = 1$ *and the summation is extended over those residues* l *of* q *for which* $\delta \mid z$.

We denote by

$$G = g + m\pi$$

the primitive root $(\mathrm{mod}\, q)$ to which the indices refer, g being a primitive root $(\mathrm{mod}\, \pi)$.[22])

Suppose first that $\delta = k = \pi - 1$. Then the indices of the l's in question are

$$0, \quad \pi - 1, \quad 2(\pi - 1), \quad \ldots, \quad (\pi^{\lambda-1} - 1)(\pi - 1).$$

Suppose that z_1 and z_2 are any two of these $\pi^{\lambda-1}$ indices, $z_2 > z_1$, and l_1 and l_2 the corresponding values of l. Then

$$l_2 - l_1 \equiv G^{z_1}(G^{z_2 - z_1} - 1) = G^{z_1}(G^{\mu\delta} - 1) \qquad (\mathrm{mod}\, \pi),$$

where μ is an integer, and

$$G^{\mu\delta} - 1 \equiv g^{\mu\delta} - 1 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, \pi).$$

Hence $l_2 - l_1 \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, \pi)$. On the other hand, l_1 and l_2 are incongruent to modulus q, since $\mu\delta = z_2 - z_1 < \pi^{\lambda-1}(\pi - 1)$ and G is a primitive root for q. It follows that the l's in question are the numbers of the arithmetical progression

$$1, \quad \pi + 1, \quad 2\pi + 1, \quad \ldots, \quad (\pi^{\lambda-1} - 1)\pi + 1,$$

so that

$$\sum_{l} e_q(-lp) = e_q(-p) \sum_{r=0}^{\pi^{\lambda-1}-1} e\left(-\frac{rp}{\pi^{\lambda-1}}\right) = 0.$$

The lemma is therefore proved when $\delta = \pi - 1$. The extension to the general case is immediate. The indices of the l's in question are now

$$0, \ \delta, \ 2\delta, \ \ldots, \ \pi - 1, \ \ldots, \ \pi^{\lambda-1}(\pi - 1) - \delta$$

and form $\frac{\pi - 1}{\delta}$ arithmetical progressions of the type

$$A, \ A + \pi - 1, \ \ldots, \ A + (\pi^{\lambda-1} - 1)(\pi - 1),$$

where A is one of $0, \delta, 2\delta, \ldots, \pi - 1 - \delta$. The l's corresponding to the indices contained in any one of these progressions form an arithmetical pregression of difference π, and the sum of the lemma splits up into $\frac{\pi - 1}{\delta}$ sums which vanish individually.

---

[22]) Landau, *Handbuch*, S. 394.

3.4. Lemma 10. *We have*

$$S'_{p,q} = \sum_{l=0}^{q-1} e_q(lp) \sum_{\varkappa'} \bar{\chi}_{\varkappa'}(l), \tag{3.41}$$

the summation with respect to $\varkappa'$ extending over all special characters.

We may plainly restrict l to values prime to q. If $(l, q) = 1$, $(m, q) = 1$, we have, by Lemma 6,

$$\sum_l e_q(lp) \sum_\varkappa \bar{\chi}_\varkappa(l) \chi_\varkappa(m) = \sum_{l \equiv m} \sum_\varkappa + \sum_{l \not\equiv m} \sum_\varkappa = h e_q(mp).$$

Hence, if j runs through values less than and prime to q,

$$S'_{p,q} = \sum_j e_q(j^k p) = \frac{1}{h} \sum_j \sum_l \sum_\varkappa e_q(lp) \bar{\chi}_\varkappa(l) \chi_\varkappa(j^k)$$

$$= \frac{1}{h} \sum_l e_q(lp) \sum_\varkappa \bar{\chi}_\varkappa(l) \sum_j (\chi_\varkappa(j))^k.$$

The sum with respect to j is zero unless $\chi_\varkappa$ is special, when it is h; whence the lemma.

Lemma 11. *If $q = \pi^\lambda$ $(1 \leqq \lambda \leqq k)$ and $\delta = (h, k)$, then*

$$S'_{p,q,k} = S'_{p,q,\delta}. \tag{3.42}$$

This is an immediate consequence of Lemma 10. For the right hand side of (3.41) involves k only in so far as the special characters are fixed by k, and is therefore unaltered when k is replaced by δ.

Lemma 12. *If $q = \pi^\lambda$ $(1 < \lambda \leqq k)$ and $\pi + k$, then*

$$S_{p,q,k} = \pi^{\lambda-1}. \text{ [23]} \tag{3.43}$$

It is plain from (3.13) that what we have to prove is

$$S'_{p,q,k} = 0, \tag{3.44}$$

or, by Lemma 11,

$$S'_{p,q,\delta} = 0. \tag{3.45}$$

By Lemmas 10 and 8, we have

$$S'_{p,q,\delta} = \sum_l e_q(lp) \sum_{\varkappa'} \bar{\chi}_{\varkappa'}(l) = \delta \sum_l e_q(lp),$$

where the last summation is restricted to values of l whose indices are multiples of δ; and this sum is zero, by Lemma 9 [24].

---

[23]) This has been proved already, in a different manner, in P. N. 2, S. 19–21; but it is interesting to see how the result arises from our present point of view.

[24]) Since $\delta \mid \pi - 1$ when $\pi + k$.

3.5. Lemma 13. *If* $\lambda = 1$, $q = \pi$, *and* $\delta = 1$, *then*

(3.51) $$S_{p,q,k} = 0.$$

But if $\delta > 1$ *then*

(3.52) $$S_{p,q,k} = \sum_{\varkappa'} \tau_{\bar{\varkappa}} \chi_{\varkappa'}(p),$$

where

(3.53) $$\tau_{\bar{\varkappa}} = \sum_{l} e_q(l) \bar{\chi}_{\varkappa}(l),$$

and the summation with respect to $\varkappa'$ *extends over the special characters* χ', *exclusive of the principal character* χ_1. *Also*

(3.54) $$|S_{p,q,k}| \leqq (\delta - 1)\sqrt{q}.$$

We may regard (3.52) as including (3.51), since its right hand side disappears when $\delta = 1$.

We have, by (3.13) and (3.41),

$$S_{p,q,k} = 1 + S'_{p,q,k} = 1 + \sum_{l} e_q(lp) \bar{\chi}_1(l) + \sum_{l} e_q(lp) \sum_{\varkappa'} \bar{\chi}_{\varkappa'}(l),$$

where the principal character is now excluded from the summation with respect to $\varkappa'$, and l runs from 0 to $q-1$. The sum of the first two terms is

$$1 + c_q(p) = 1 + \mu(q) = 0.$$

The third term is

$$\sum_{\varkappa'} \chi_{\varkappa'}(p) \sum_{l} e_q(lp) \bar{\chi}_{\varkappa'}(lp).$$

Since lp runs through the residues of q when l does so, the inner sum is $\tau_{\bar{\varkappa}'}$, whence the result of the lemma.

Finally, to prove (3.54), we have only to observe that, q being prime, $\bar{\chi}_{\varkappa}$ is primitive (*eigentlich*)[25], and

$$|\tau_k| = \sqrt{q}.$$

4. The behaviour of χ_π for large values of π.

4.1. In this section we are concerned with large values of π, and may suppose $\pi > k$, so that $\theta = 0$, $\varphi = 1$. The O's which occur refer to the passage of π to infinity; the constants which they imply depend upon k and s, but not upon n.

We suppose that $k \geqq 3$.

Lemma 14. *We have*

(4.11) $$A_\pi = \pi^{-s} \sum_{\mathfrak{p}} e_\pi(-n\mathfrak{p}) \Big(\sum_{\varkappa'} \tau_{\bar{\varkappa}} \chi_{\varkappa'}(\mathfrak{p}) \Big)^{\mathfrak{r}},$$

[25]) Landau, *Handbuch*, S. 479.

where the summation with respect to χ' extends over all special characters other than the principal character.

This follows at once from (3.52).

Lemma 15. *If $s \geqq 1$, $\beta = 0$, then*

$$\chi_\pi = 1 + O(\pi^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s}). \tag{4.12}$$

We suppose first that $\pi + n$, so that $\nu = 0$. Then

$$\chi_\pi = 1 + A_\pi. \tag{4.13}$$

Here we replace A_π by the right hand side of (4.11). Any product of χ's is a χ and so, when we expand by the multinomial theorem and invert the order of summation, we obtain

$$A_\pi = \pi^{-s} \sum\nolimits_1' T \sum_p \chi(p) e_\pi(-np),$$

where T is a product of s τ's, χ a product of s χ's, and the number of terms in $\sum_1'$ is $O(1)$. The inner sum is $O(\sqrt{\pi})$ for every χ and all values of n in question[26]), and so

$$A_\pi = O(\pi^{-s} \cdot (\sqrt{\pi})^s \cdot \sqrt{\pi}) = O(\pi^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s}),$$

which proves the lemma when $\pi + n$.

Next suppose $\pi \mid n$, so that $0 < \nu < k$. In this case $\lambda_0 = \nu + 1$ and

$$\chi_\pi = 1 + A_\pi + \sum_2^{\nu+1} A_{\pi^\lambda}. \tag{4.14}$$

Now $S_{p,\pi^\lambda} = \pi^{\lambda-1}$ for $2 \leqq \lambda \leqq \nu + 1 \leqq k$, by Lemma 12; and so

$$A_{\pi^\lambda} = \pi^{-s} \sum_p{}' e_{\pi^\lambda}(-np) = \pi^{-s} c_{\pi^\lambda}(n),$$

$$A_{\pi^\lambda} = \pi^{\lambda-s-1}(\pi - 1) \quad (2 \leqq \lambda \leqq \nu), \qquad A_{\pi^\lambda} = -\pi^{\lambda-s-1} \quad (\lambda = \nu + 1),$$

$$\sum_2^{\nu+1} A_{\pi^\lambda} = -\pi^{1-s}.$$

Thus

$$\chi_\pi = 1 + O(\pi^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s}) - \pi^{1-s} = 1 + O(\pi^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s}).$$

This completes the proof of Lemma 15.

If n is fixed, $\pi + n$ from a certain value of π onwards. Hence we obtain

Theorem 3. *The singular series $S = \Sigma A_q$, and the product $P = \Pi \chi_\pi$, are absolutely convergent for $s \geqq 4$, and $S = P$.*

---

[26]) It is -1 if χ is the principal character, and the product of a χ and a τ if χ is non-principal (and so primitive: Landau, *Handbuch*, S. 480).

4.2. Lemma 16. *If* $s \geqq 1$ *then*

4.21) $$1 + O(\pi^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s}) < \chi_\pi < (1 + \pi^{k-s} + \ldots + \pi^{\beta(k-s)})(1 + O(\pi^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s})).$$

This is proved already if $\beta = 0$, and we may suppose $\beta > 0$. From Theorem 2 we have, on the one hand

4.22) $$\chi_\pi(n) \geqq \pi^{1-s} N(\pi, 0),$$

and on the other

4.23) $$\chi_\pi(n) \leqq (1 + \pi^{k-s} + \ldots + \pi^{(\beta-1)(k-s)})\pi^{1-s} N(\pi, 0) + \pi^{\beta(k-s)+1-s} N(\pi, n'),$$

where $n' = \frac{n}{\pi^{\beta k}}$. Since neither π nor n' is divisible by π^k, we have

$$\pi^{1-s} N(\pi, 0) = \pi^{1-s} N(\pi, \pi) = \chi_\pi(\pi), \qquad \pi^{1-s} N(\pi, n') = \chi_\pi(n'),$$

and each of these is, by Lemma 15, of the form $1 + O(\pi^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s})$. Thus (4.21) follows from (4.22) and (4.23).

As a corollary we have

Lemma 17. *If* $s \geqq k + 2$ *then* $\chi_\pi = 1 + O(\pi^{-2})$.

5. The numbers γ_π, $\Gamma(k)$.

5.1. Given k and π, and any positive integer m, there are two possibilities. Either (i) there is a number

5.11) $$h_\pi = h(k, s, \pi) > 0$$

such that

5.12) $$\chi_\pi \geqq h_\pi$$

for $s \geqq m$ and all values of n, or (ii) there is no such number. We define

$$\gamma_\pi = \gamma(k, \pi)$$

as the least value of m for which (i) is true, and $\Gamma(k)$ by

5.13) $$\Gamma(k) = \operatorname*{Max}_\pi \gamma_\pi.$$

Further, we define

$$\gamma'_\pi = \gamma'(k, \pi).$$

as the least value of m such that

5.14) $$\chi_\pi > 0$$

for $s \geqq m$ and all values of n.

It is evident that $\gamma'_\pi \leqq \gamma_\pi$.

Lemma 18. *If* $\chi_\pi > 0$ *for all sufficiently large values of* n, *then* $\chi_\pi > 0$ *for all values of* n.

In proving this Lemma we leave out of account for the moment the special case $k=4$, $\pi=2$. That the result is still true in this case will appear incidentally later.

It is easy to see that, apart from the exceptional case, $\varphi<k$. Thus if $\pi>2$, $\varphi=\theta+1\leqq 2^\theta<\pi^\theta\leqq k$.

If $\pi=2$, $\theta\geqq 3$, then $\varphi=\theta+2<2^\theta\leqq k$.

If $\pi=2$, $\theta=0$, k is odd and $\varphi=2<3\leqq k$.

If $\pi=2$, $\theta=1$, then k is oddly even and $\varphi=3<6\leqq k$.

If $\pi=2$, $\theta=2$, then $\varphi=4<6\leqq k$, unless $k=4$.

Thus $\varphi<k$ in every case except that in which $k=4$, $\pi=2$, when $\varphi=k$.

Now let

$$n=\pi^\varphi m+n' \qquad (0\leqq n'<\pi^\varphi).$$

If $n'\neq 0$ then $\beta=0$ (since $\varphi<k$) and so, by Theorem 2,

$$\chi_\pi(n)=\pi^{\varphi(1-s)}N(\pi^\varphi,n)=\pi^{\varphi(1-s)}N(\pi^\varphi,n')=\chi_\pi(n').$$

But $\chi_\pi(n)>0$ for large values of m, and therefore $\chi_\pi(n')>0$. It follows that $\chi_\pi>0$ for all values of n that are not divisible by π^φ.

Again, if $(m,\pi)=1$, we have, by Theorem 2,

$$\chi_\pi(\pi^\varphi m)=\pi^{\varphi(1-s)}N(\pi^\varphi,0),$$

since $\varphi<k$. The left hand side is positive if m is large, and so $N(\pi^\varphi,0)>0$. Hence, whatever be the value of m (prime to π),

$$\chi_\pi(\pi^\varphi m)\geqq\pi^{\varphi(1-s)}N(\pi^\varphi,0)>0.$$

It follows that $\chi_\pi>0$ also when $n'=0$, which proves the lemma.

5.2. Lemma 19. *The necessary and sufficient condition that*

$$N(\pi^\varphi,n)>0, \tag{5.21}$$

for every n, is that $s\geqq\gamma_\pi$. Further,

$$\gamma'_\pi=\gamma_\pi \tag{5.22}$$

except when $k=4$, $\pi=2$, in which case

$$\gamma_2=16, \quad \gamma'_2=15. \tag{5.23}$$

Leaving aside the exceptional case, so that $\varphi<k$, let $s\geqq\gamma'_\pi$. Then $\chi_\pi(\pi^\varphi)>0$. But $\beta=0$ when $n=\pi^\varphi$ (since $\varphi<k$), and so

$$\chi_\pi(\pi^\varphi)=\pi^{\varphi(1-s)}N(\pi^\varphi,\pi^\varphi)=\pi^{\varphi(1-s)}N(\pi^\varphi,0).$$

Hence

$$N(\pi^\varphi,0)>0.$$

If on the other hand $n\not\equiv 0 \pmod{\pi^\varphi}$, then $\beta=0$ (since $\varphi\leqq k$). Hence

$$\chi_\pi=\pi^{\varphi(1-s)}N(\pi^\varphi,n)$$

and

$$N(\pi^\varphi, n) > 0.$$

Thus $s \geqq \gamma'_\pi$ is a sufficient condition that (5.21) should hold for every n.

Next, suppose that (5.21) holds for $s = s_1$ and every n. Then it holds, *a fortiori*, for $s \geqq s_1$ and every n, and the N's that occur in Theorem 2 are both positive. Hence

$$\chi_\pi \geqq \pi^{\varphi(1-s)} \qquad (s \geqq s_1)$$

and so

$$s_1 \geqq \gamma_\pi \geqq \gamma'_\pi.$$

It follows, first that $s \geqq \gamma'_\pi$ is both necessary and sufficient for (5.21), and secondly that $s \geqq \gamma'_\pi$ involves $s \geqq \gamma_\pi$, *i. e.* that $\gamma'_\pi = \gamma_\pi$.

If $k = 4$, $\pi = 2$, then $2^\varphi = 16$. Now x^4 is congruent to 0 or to 1 to modulus 16, according as x is even or odd. It follows that $N(16, n) > 0$ for $s \geqq 16$ and every n; that

$$N(16, n) > 0 \quad (16 + n), \qquad N(16, 0) = 0$$

when $s = 15$; and that $N(16, 15) = N(16, 0) = 0$ when $s < 15$. Finally it follows, from Theorem 2, that

$$\chi_2 > h_2 \quad (s \geqq 16), \qquad \chi_2 > 0 \quad (s = 15),$$

$$\chi_2(16^\beta . 15) = 2^{\beta(4-15)+4(1-15)} N(16, 15) = 2^{-11(\beta+1)} \qquad (s = 15), \ [27]$$

and

$$\chi_2(16^\beta . 15) = 0 \qquad (s < 15).$$

Since $2^{-11(\beta+1)} \to 0$ when $\beta \to \infty$, these results embody (5.23). Incidentally we see that Lemma 18 is still true in the exceptional case.

5.3. Theorem 4: $G(k) \geqq \Gamma(k)$.

Leaving aside for the moment the exceptional case $k = 4$, $\pi = 2$, suppose that $s \geqq G(k)$. Then any sufficiently large n is the sum of s k-th powers, so that $\chi_\pi > 0$ for every π and all sufficiently large values of n. Hence, by Lemma 18, $\chi_\pi > 0$ for every π and every n, so that $s \geqq \gamma_\pi$. It follows that $G(k) \geqq \gamma_\pi$ for every π, which proves the theorem, apart from the exceptional case. In this case $\gamma_2 = 16$, and the result is still true, since $G(4) \geqq 16$ [28]).

[27]) $N(16, 15) = 8^{15}$ when $s = 15$, since each x may have any one of the values 1, 3, 5, ..., 15.

[28]) The lower bound Γ for G is associated with the vanishing of the singular series S for $s \leqq \Gamma - 1$, *except when* $k = 4$. When $k = 4$, $\Gamma = 16$, and the series is positive for $s = 15$, but assumes arbitrarily small values for suitable values of n.

It should be observed that our proof (see § 5.5 below) that

$$G(\pi^\theta(\pi - 1)) \geqq \gamma_\pi = \pi^\varphi \qquad (\pi > 2)$$

(Fortsetzung der Fußnote 28 auf nächster Seite)

5.4. Lemma 20. *Suppose that* $\pi^\theta \mid k$, *and that* φ *is defined as in Theorem 2. Further, suppose that*

$$k = \pi^\theta \varepsilon k_0, \tag{5.41}$$

where

$$\varepsilon = (\pi^{-\theta} k, \pi - 1), \tag{5.42}$$

and

$$d = \frac{\pi - 1}{\varepsilon}; \tag{5.43}$$

so that $\varepsilon \mid \pi - 1$ *and* $(k_0, d) = 1$. *Then*

$$\gamma_\pi \leqq c = c_\pi = c(k, \pi) = \frac{\pi^\varphi - 1}{\pi - 1}\varepsilon + 1. \tag{5.44}$$

We write $\varrho = \pi^\varphi$. We must distinguish the cases $\pi > 2$ and $\pi = 2$.

(i) If $\pi > 2$, $\varphi = \theta + 1$. We suppose that G is a primitive root (mod ϱ). We divide the residues to modulus ϱ into classes as follows. Consider first the residues n_0 prime to ϱ. If v is the index of n_0, we have

$$n_0 \equiv G^v \equiv G^{m_0 \psi_0 + e} \pmod{\varrho},$$

where

$$\psi_0 = \frac{\Phi(\varrho)}{d} = \frac{\Phi(\pi^\varphi)}{d} = \frac{\pi^{\varphi-1}(\pi-1)}{d} = \pi^{\varphi-1}\varepsilon,$$ [29])

m_0 has one or other of the d values $0, 1, \ldots, d-1$, and e one or other of the ψ_0 values $0, 1, \ldots, \psi_0 - 1$. The d values of n_0 with a common e we class together and call the numbers

$$\alpha_e^0 \qquad (e = 0, 1, \ldots, \psi_0 - 1);$$

the class of numbers α_e^0 with a fixed e we call C_e^0.

Next, consider the residues n_i for which $\pi^i \mid n_i$, where $0 < i < \varphi$. We have

$$n_i \equiv \pi^i N_i,$$

where the N_i's are the $\Phi(\pi^{\varphi-i})$ numbers less than and prime to $\pi^{\varphi-i}$. As G is also a primitive root to modulus $\pi^{\varphi-i}$, we can write

$$N_i \equiv G^{m_i \psi_i + e} \pmod{\pi^{\varphi-i}},$$

$$n_i \equiv \pi^i N_i \equiv \pi^i G^{m_i \psi_i + e} \pmod{\pi^\varphi},$$

---

is essentially the same as Kempner's proof (see pp. 45—46 of his Inaugural-Dissertation) that

$$G(2^\theta) \geq 2^\varphi = 2^{\theta+2}.$$

His proof too fails when $k = 4$, and he has to appeal to the structure of the particular number 31.

[29]) We write $\Phi(\varrho)$ for Euler's function usually denoted by $\varphi(\varrho)$, as φ is used here in a different sense.

where

$$\psi_i = \frac{\Phi(\pi^{\varphi-i})}{d} = \frac{\pi^{\varphi-i-1}(\pi-1)}{d} = \pi^{\varphi-i-1}\varepsilon,$$

n_i has again one or other of the values $0, 1, \ldots, d-1$, and e one or other of the values $0, 1, \ldots, \psi_i - 1$. The ψ_i new classes obtained in this manner we denote by

$$C_e^i \qquad (e = 0, 1, \ldots, \psi_i - 1),$$

and a typical member of C_e^i by α_e^i.

Finally, the single number 0 is the sole member α_0^φ of a class C_0^φ. The total number of classes into which the residues are divided is

$$\psi_0 + \psi_1 + \ldots + \psi_{\varphi-1} + 1 = \frac{\pi^\varphi - 1}{d} + 1 = c_\pi = c.$$

We may denote the whole system of classes, in the order in which they have been defined, by $C_0, C_1, \ldots, C_r, \ldots, C_c$, and a typical member of C_r by α_r.

The class C_0 consists of the residues of k-th powers of numbers x prime to π. For

$$k = \pi^\theta \varepsilon k_0 = k_0 \frac{\pi^\theta(\pi-1)}{d} = k_0 \psi_0.$$

Also $x \equiv G^t$ for some t (since $(x, \pi) = 1$), and

$$x^k \equiv G^{t k_0 \psi_0} = G^{m_0 \psi_0},$$

so that x^k is an α_0. Moreover we can choose t so that $t k_0$ has an arbitrary residue m_0 to modulus d, since $(k_0, d) = 1$, so that every α_0 is an x^k.

Finally, to complete the properties of the classes which are immediately relevant, (1) 1 belongs to C_0, (2) $\alpha_0 \alpha_r$, where α_0 and α_r are any members of C_0 and C_r respectively, belongs to C_r, and (3) $\alpha_0 \alpha_r$, where α_r is a given member of C_r, can be identified with any member of C_r by choice of α_0.

Of these properties (1) is obvious. To prove (2) we observe that, if

$$\alpha_0 \equiv n_0 \equiv G^{m_0 \psi_0}, \qquad \alpha_r \equiv n_i \equiv \pi^i G^{m_i \psi_i + e},$$

then

$$\alpha_0 \alpha_r \equiv \pi^i G^{m_0 \psi_0 + m_i \psi_i + e}$$

is an α_r, since $\psi_i \mid \psi_0$. Finally

$$m_0 \psi_0 + m_i \psi_i = (\pi^i m_0 + m_i) \psi_i,$$

and we can choose m_0 so that $\pi^i m_0 + m_i$ shall have an arbitrary residue (mod d), since $(\pi, d) = 1$; hence $\alpha_0 \alpha_r$ can be identified with any member of C_r.

5. 5. To prove Lemma 20 it is enough, by Lemma 19, to show that

(5. 51) $$N(\pi^\varphi, n) > 0$$

for $s \geqq c$ and every n. And the necessary and sufficient condition for (5. 51) is that every n should be congruent (mod π^φ) to the sum of at most c numbers α_0. If any α_r is the sum of not more than c α_0's, then so, by (2) and (3) of the last paragraph, is every $\alpha_{r'}$. In these circumstances we shall say that C_r is representable, and what we have to prove is that this is so for all the c values of r.

Suppose that $1 \leqq c' \leqq c$. *Then there are at least c' different classes representable by not more than c' α_0's.* For, in the first place, this is true when $c' = 1$. Suppose that it is true for $c' = \bar{c} < c$ but false for $c' = \bar{c} + 1$, and let $\bar{C}$ be a typical class representable by $\bar{c}$ α_0's, and C_r a $\bar{C}$. Then α_r belongs to a $\bar{C}$, and therefore, since no new classes become representable when $\bar{c}$ is changed to $\bar{c}+1$, $\alpha_r + 1$ belongs to a $\bar{C}$. Similarly $\alpha_r + 1 + 1 = \alpha_r + 2$ belongs to a $\bar{C}$, and, repeating the argument, *every* residue (mod ϱ) belongs to a $\bar{C}$, which is a contradiction.

Taking $c' = c$ we see that c distinct classes, and therefore all residues (mod ϱ), are representable by c α_0's, which proves the lemma, when $\pi > 2$.

(ii) There remains the case $\pi = 2$, in which $\varphi = \theta + 2$, $\varepsilon = d = 1$, $c = \pi^\varphi = \varrho$. In this case there is nothing to prove, for any residue (mod ϱ) is representable by at most ϱ 1's.

A particularly interesting case is that in which $d = 1$, $\varepsilon = \pi - 1$. In this case

$$k = \pi^\theta (\pi - 1) k_0,$$

where k_0 is prime to π. Here

$$\gamma_\pi \leqq \pi^\varphi = \pi^{\theta+1} \quad (\pi > 2), \qquad \gamma_2 \leqq 2^\varphi = 2^{\theta+2} \qquad (\pi = 2).$$

If $\pi > 2$, $\gamma_\pi = \pi^\varphi$. For

$$x^k = x^{\pi^\theta (\pi-1) k_0} \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\ \pi^\varphi),$$

so that 1 is the only α_0. Hence $N(\pi^\varphi, 0) = 0$ if $s < \pi^\varphi$, and $\gamma_\pi \geqq \pi^\varphi$, by Lemma 19. In particular

$$\gamma_\pi = \pi = k + 1$$

if $k = \pi - 1$. Thus $\gamma_5 = 5$ if $k = 4$, $\gamma_7 = 7$ if $k = 6$.

If $\pi = 2$, $k = 2^\theta k_0$. Suppose first that $\theta > 0$. Then

$$x^{2^\theta} \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\ 2^{\theta+2}),$$

and so $x^k \equiv 1$ (mod 2^φ). Except when $k = 4$ our argument above applies, and we obtain

$$\gamma_2 = 2^\varphi = 2^{\theta+2} \qquad (\theta > 0).$$

The result still holds when $k = 4$, since then $\gamma_2 = 16 = 2^4$.

The argument fails if $\theta = 0$ (so that k is odd). Here $\varrho = 2^2 = 4$; -1 is a k-ic residue (mod 4); and 0, 1, 2, 3 are all representable by at most two of the numbers ± 1. Thus

$$\gamma_2 = 2 = 2^{\theta+1} \qquad (\theta = 0).$$

5. 6. In general it is possible to go a little further than in Lemma 20.

Lemma 21. *Suppose that* $d_1 \mid d$, *where* $d_1 > 1$. *Then*

$$\gamma_\pi \leqq \mathrm{Max}(d_1, c-1). \tag{5. 61}$$

Since $d_1 \mid \pi - 1$, (5. 61) gives in particular

$$\gamma_\pi \leqq \mathrm{Max}(\pi - 1, c-1)$$

in all cases and,

$$\gamma_\pi \leqq \mathrm{Max}(k-1, c-1)$$

if $\theta > 0$.

To prove Lemma 21, suppose that $1 \leqq c' \leqq c$, and let $\nu(c')$ be the number of classes, other than the class C_c (containing the residue 0 only), that are representable by not more than c' α_0's. Then

$$\nu(c'+1) \geqq \mathrm{Min}(\nu(c')+1, c-1). \tag{5. 62}$$

For, if (5. 62) is false $\nu(c'+1) = \nu(c') < c-1$. Let $\bar{C}$ be a typical class of the $\nu(c')$ classes, and C_r a $\bar{C}$. Then, if α_r belongs to C_r, $\alpha_r + 1$ must belong to a $\bar{C}$ or to C_c, since no new classes, other than perhaps C_c, are representable by $c'+1$ α_0's. If $\alpha_r + 1 \equiv 0$, $\alpha_r + 2$ belongs to C_0, and therefore to a $\bar{C}$. If $\alpha_r + 1$ belongs to a $\bar{C}$, $\alpha_r + 2$ must belong to a $\bar{C}$ or to C_c. Repeating the argument, we see that every residue, other than 0, belongs to a $\bar{C}$, which is a contradiction.

From (5. 62) it follows that

$$\nu(c-1) \geqq c-1,$$

so that all residues, 0 perhaps excepted, are representable by at most $c-1$ α_0's. It remains to consider the residue 0. Let $d = \eta d_1$ and

$$\alpha_0' \equiv G^{\eta\psi_0} \pmod{\varrho}.$$

Then $\alpha_0' \not\equiv 1$, since $\eta\psi_0 < \varphi(\varrho)$ and G is a primitive root (mod ϱ),

$$(\alpha_0')^{d_1} \equiv G^{d\psi_0} = G^{\psi(\varrho)} \equiv 1 \pmod{\varrho},$$

$$1 + \alpha_0 + (\alpha_0')^2 + \ldots + (\alpha_0')^{d_1-1} = \frac{1-(\alpha_0')^{d_1}}{1-\alpha_0'} \equiv 0 \pmod{\varrho},$$

and 0 is representable by d_1 α_0's, which completes the proof of the lemma.

Suppose in particular that $d_1 = d = 2$, so that $\pi > 2$ and

$$k = \frac{1}{2}\pi^\theta(\pi-1)k_0.$$

In this case the α_0's are the two numbers ± 1, and

$$\gamma_\pi \geqq \frac{1}{2}(\pi^\varphi - 1).$$

But

$$c - 1 = \frac{1}{2}(\pi^{\theta+1} - 1) = \frac{1}{2}(\pi^\varphi - 1),$$

so that

$$\gamma_\pi = \frac{1}{2}(\pi^\varphi - 1) = c - 1.$$

Thus in this case also we can determine γ_π exactly.

5. 7. It is convenient to sum up our results concerning the cases $d = 1$ and $d = 2$ in a separate lemma.

Lemma 22. *If $k = \pi^\theta(\pi - 1)k_0$, where $\pi > 2$ and k_0 is prime to π, then*

(5. 71) $$\gamma_\pi = \pi^{\theta+1}.$$

If $k = 2^\theta k_0$, where $\theta > 0$ and k_0 is odd, then

(5. 72) $$\gamma_2 = 2^{\theta+2}.$$

If k is odd, then $\gamma_2 = 2$.

If $k = \frac{1}{2}\pi^\theta(\pi - 1)k_0$, where $\pi > 2$ and k_0 is prime to π, then

(5. 73) $$\gamma_\pi = \frac{1}{2}(\pi^{\theta+1} - 1).$$

5. 8. We know that $G(k) \geqq \Gamma(k) = \operatorname{Max} \gamma_\pi$. Thus, when k is given, every value of γ_π gives a lower bound for $G(k)$. These, when less than $k + 2$, add nothing to our knowledge of $G(k)$, since $G(k)$ is always greater than k. There is therefore a special interest in determining as systematically as possible all cases in which

$$\gamma_\pi > k + 1.$$

Lemma 23. *We have*

(5. 81) $$\gamma_\pi \leqq k + 1$$

unless (α) $k = 2^\theta$ $(\theta > 0)$, $\pi = 2$, *when* $\gamma_2 = 2^{\theta+2} = 4k$,

(β) $k = 2^\theta 3$ $(\theta > 0)$, $\pi = 2$, *when* $\gamma_2 = 2^{\theta+2} = \frac{4}{3}k$,

or (γ) $k = \pi^\theta \varepsilon$ $(\theta > 0)$, *where* $\pi > 2$ *and* $\varepsilon \mid \pi - 1$.

In cases (α) *and* (β) (5. 81) *is false; in case* (γ) *it may be true or false.*

We write $k = \pi^\theta \varepsilon k_0$, as in Lemma 20. If $\theta = 0$, $\pi > 2$, then

$$\gamma_\pi \leqq c = \varepsilon + 1 \leqq k + 1,$$

by Lemma 20. If $\theta = 0$, $\pi = 2$, then $\gamma_2 = 2$ by Lemma 22. Thus we need only consider cases in which $\theta > 0$.

Suppose first $\pi > 2$. If $k_0 > 1$, we have

$$\gamma_\pi \leqq c = \frac{\pi^{\theta+1}-1}{\pi-1}\varepsilon + 1 < \frac{2(\pi^{\theta+1}-\pi^\theta)}{\pi-1}\varepsilon + 1 \leqq \pi^\theta \varepsilon k_0 + 1 = k+1.$$

Thus (5. 81) is true unless $k_0 = 1$, $k = \pi^\theta \varepsilon$, which is case (γ).

Next suppose $\pi = 2$, $k = 2^\theta k_0$. If $k_0 > 3$, we have

$$\gamma_2 = 2^{\theta+2} = 4\frac{k}{k_0} < k+1.$$

Thus (5. 81) is true unless $k_0 = 1$ or 3, cases (α) and (β).

The case in which $k = 6$ is interesting as falling under both (β) and (γ). If $\pi = 3$, $k = 3.2 = \pi(\pi-1)$, $\varepsilon = \pi - 1$, $d = 1$, and $\gamma_3 = 3^2 = 9$. And $\gamma_2 = 2^3 = 8$.

In case (γ), (5. 81) may be true or false. Thus it is true when $\varepsilon = 3$, $\pi = 3$, for then $\gamma_3 = 4$. But it is false when $k = 6$, $\pi = 3$.

5. 9. We must now collect our results and state them as theorems concerning $\Gamma(k)$. We shall say that k is exceptional if it has one of the forms in (α), (β), or (γ) of Lemma 23.

Theorem 5. *If k is not exceptional, then*

$$\Gamma(k) \leqq k+1.$$

This is an immediate corollary of Lemma 23.

Theorem 6. *If $\theta > 1$ then* $\Gamma(2^\theta) = 2^{\theta+2}$.

Theorem 7. *If $\theta > 1$ then* $\Gamma(2^\theta 3) = 2^{\theta+2}$.

Theorem 8. $\Gamma(6) = 9$.

These theorems follow from Lemma 23, when we observe that the numbers in question in each case exceed $k+1$.

Theorem 9. *If $\pi > 2$, $\theta > 0$, then* $\Gamma(\pi^\theta(\pi-1)) = \pi^{\theta+1}$. *This equality holds also when $\theta = 0$, provided that $k = \pi - 1$ is not exceptional.*

The second part follows from Theorem 5 and Lemma 22. We may therefore suppose $\theta > 0$. We have already seen that $\gamma_\pi = \pi^{\theta+1}$, which is greater than $k+1$. If π_1 is a prime other than π, $\gamma_{\pi_1} \leqq k+1$ unless $\pi_1 = 2$, $\pi^\theta(\pi-1) = 2^{\theta_1}$, or $\pi_1 = 2$, $\pi^\theta(\pi-1) = 2^{\theta_1}3$, or $\pi_1 > 2$, $\pi^\theta(\pi-1) = \pi_1^{\theta_1}\varepsilon_1$, where $\varepsilon_1 \mid \pi_1 - 1$.

It is easy to see that the first and third alternatives are impossible, and that the second can occur only when $\pi = 3$, $\theta = 1$, $k = 6$. In this case the result has been proved already; in all other cases we have $\gamma_{\pi_1} < \gamma_\pi$ and $\Gamma(k) = \gamma_\pi = \pi^{\theta+1}$.

Theorem 10. *If $\pi > 2$, $\theta > 0$, then*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\pi^\theta(\pi-1)\right) = \frac{1}{2}(\pi^{\theta+1}-1).$$

Here $\gamma_\pi = \frac{1}{2}(\pi^{\theta+1} - 1)$, since $d = 2$. This is greater than $k+1$ except when $\pi = 3$, $\theta = 1$, $k = 3$, when the two numbers are equal. Moreover $\frac{1}{2}\pi^\theta(\pi - 1)$ cannot be equal to 2^{θ_1}, $2^{\theta_1}3$, or $\pi_1^{\theta_1}\varepsilon_1$, where $\pi_1 \neq \pi$, $\theta_1 > 0$, $\varepsilon_1 \mid \pi_1 - 1$. Hence $\gamma_{\pi_1} \leqq \gamma_\pi$ and $\Gamma(k) = \gamma_\pi$.

Theorem 11. *If $\pi > 2$ and $k = \pi^\theta\varepsilon$, where $\theta > 0$, $\varepsilon \mid \pi - 1$, then*

$$\Gamma(k) \leqq \mathrm{Max}(\gamma_\pi, k+1).$$

It may be verified at once that $\pi^\theta\varepsilon$ cannot be of any of the forms 2^{θ_1}, $2^{\theta_1}3$, $\pi_1^{\theta_1}\varepsilon_1$, except when $\pi = 3, \theta = 1, \varepsilon = 2, k = 6$. In this case $\Gamma(k) = \gamma_3 = 9$. The result follows from Lemma 23.

Theorem 12. *In all cases*

$$\Gamma(k) \leqq 4k.$$

The sign of equality occurs if and only if $k = 2^\theta$ $(\theta \geqq 2)$.

Theorem 13. *In all cases*

$$\Gamma(k) < (k-2)2^{k-1} + 5.$$

This theorem, which is included in Theorem 12 except when $k = 3$, is inserted only because it is what we require for the proof of Theorem 1. Our actual bounds for $\Gamma(k)$ are much better.

When $k = 3$, $\Gamma(3) = 4 < 9 = 1 \cdot 4 + 5$.

It may help to elucidate the results which we have obtained if we show in tabular form the actual values of $\Gamma(k)$ for a number of values of k.

$k=$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$\Gamma(k)=$	4	16	5	9	4	32	13	12	11	16	6	14	15	64	6	27
$k=$	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32		
$\Gamma(k)=$	4	25	24	23	23	32	10	26	40	29	29	30	5	128		

The values of $\Gamma(k)$ for $k = 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 16, 18, 20, 21, 24, 27$ and 28 are given by the actual theorems and lemmas which we have proved; the determination of the remaining values demands further calculations into which we cannot enter here.

6. The behaviour of the singular series when $s \geqq \Gamma(k)$.

6.1. Theorem 15. *Suppose that $k > 2$ and $s_1 = \mathrm{Max}(\Gamma(k), 4)$. Then*

$$S > \sigma \tag{6.11}$$

for $s \geqq s_1$ and all values of n.

By Lemma 16, we have

$$\chi_\pi > 1 - \sigma\pi^{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}s} \qquad (s \geqq s_1).$$

ence there is a $\pi_0 = \pi_0(k, s)$ such that

$$\chi_\pi > 1 - \sigma \pi^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s} > 1 - \sigma \pi^{-\frac{3}{2}} \qquad (s \geqq s_1, \pi \geqq \pi_0);$$

nd so

$$\prod_{\pi \geqq \pi_0} \chi_\pi > \sigma \qquad (s \geqq s_1). \tag{6.12}$$

But $\chi_\pi > \sigma$ if $\pi < \pi_0$ and $s \geqq \Gamma(k)$, and so

$$\prod_{\pi < \pi_0} \chi_\pi > \sigma \qquad (s \geqq s_1); \tag{6.13}$$

nd (6.11) follows from (6.12) and (6.13).

It is plain that our main purpose is now accomplished; with Theorems 13 and 15, the proof of Theorem 1 is completed.

6.2. It is of some interest also to obtain an upper bound for S.

Theorem 16. *If* $s \geqq k+2$ *then*

$$S < \sigma. \tag{6.21}$$

For, by Lemma 16,

$$\chi_\pi < (1 + \sigma \pi^{-2})\left(1 + \sigma \pi^{-\frac{3}{2}}\right) < 1 + \sigma \pi^{-\frac{3}{2}};$$

nd the result follows immediately.

Theorem 17. *If* $s \geqq k > 3$, *then*

$$S < n^\varepsilon \tag{6.22}$$

or all sufficiently large values of n.

By Lemma 16

$$\chi_\pi < \left(1 + \sigma \pi^{-\frac{3}{2}}\right) \varrho_\pi,$$

where $\varrho_\pi = 1$ unless $\pi^k \mid n$, and then $\varrho_\pi = 1 + \beta$. It is plain that

$$\prod \varrho_\pi \leqq \prod_{\pi \mid n} (1 + a) = d(n),$$

where $\pi^a \mid n$. As $d(n) = O(n^\varepsilon)$, the theorem follows.

The interest of this theorem lies in the resulting equation

$$\varrho_{k,k}(n) = O(n^\varepsilon). \tag{6.23}$$

There is some reason for supposing that

$$r_{k,k}(n) = O(n^\varepsilon), \tag{6.24}$$

an equation from which very important consequences would follow. This equation would cease to be plausible if (6.23) at any rate were not true.

6.3. In conclusion, we return for a moment the equations (1.15) and (1.151). As we remarked before, the equation (1.15) is sufficient for

our present purpose; but it is interesting to bring the remark of Ostrowski into relation with our analysis.

Suppose that

$$N(\pi^\varphi, n) \geqq 1$$

for every n and for $s = s_0$. There is then a primitive solution of

$$x_1^k + x_2^k + \ldots + x_{s_0}^k \equiv n \pmod{\pi^\varphi}$$

for every n. Consider now the similar congruence in which s_0 is replaced by $s > s_0$. Of the x's, the last $s - s_0$ may then be selected arbitrarily, and there will be at least one primitive solution of the ensuing congruence in the first s_0. Hence

$$N_s(\pi^\varphi, n) \geqq \pi^{\varphi(s-s_0)}.$$

It follows that the inequalities which we have used, of the type

$$\chi_\pi \geqq \pi^{\varphi(1-s)};$$

may be replaced by inequalities of the type

$$\chi_\pi \geqq \pi^{\varphi(1-s)}\pi^{\varphi(s-s_0)} = \pi^{\varphi(1-s_0)};$$

and our numbers $h_\pi = h(k, \pi, s)$ and $\sigma = \sigma(k, s)$ by numbers of the type $h_\pi = h(k, \pi, s_0) = h(k, \pi)$, and $\sigma = \sigma(k, s_0) = \sigma(k)$. It is however unnecessary to develop this remark further at the moment.

We add, finally, that the number $\Gamma(k)$ has a simple and interesting arithmetical interpretation. In fact $\Gamma(k)$ is: *the least number m such that every arithmetical progression contains an infinity of numbers which are sums of m k-th powers.*

(Eingegangen am 31. Oktober 1921.)

Über das Wachstum der Potenzreihen in ihrem Konvergenzkreise. I.

Von

Otto Toeplitz in Kiel.

Das Problem der Wachstumsordnung einer ganzen transzendenten Funktion ist seit langem erledigt. Ist

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots \tag{1}$$

eine beständig konvergente Potenzreihe, und ist $M(r)$ das Maximum des Betrages der von (1) dargestellten Funktion $f(z)$ auf dem Kreise $|z| = r$, so weiß man seit den Arbeiten von Poincaré und Hadamard das Wachstum der monotonen Funktion $M(r)$ aus dem der Beträge der Koeffizienten c_n sehr wohl zu charakterisieren. Anders liegt es, wenn (1) keine beständig konvergente Potenzreihe vorstellt, sondern etwa den Einheitskreis zum Konvergenzkreis hat. Anknüpfend an das berühmte „Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres“ [1]) von Darboux, hat ebenfalls bereits Hadamard im dritten Hauptteil seiner bekannten thèse [2]) eine umfassende Theorie aufgestellt, deren Ziel in dieser Richtung lag.

Ich muß mich mit dieser Theorie und einer darauffolgenden von Fabry hier zuerst auseinandersetzen und auf ihre Haupttatsachen, die aus den Originalarbeiten nicht überall bequem herauszuheben sind, etwas genauer eingehen; ich muß damit einige Dinge berühren, die weit verwickelter sind als das, was sonst den Inhalt der vorliegenden Arbeit bilden wird. Im Grunde genommen laufen bei Hadamard zwei Theorien durcheinander, ich möchte sagen, eine feinere und eine gröbere. Die gröbere ist das, was hier in Betracht kommt; aber sie stützt sich auf die feinere, mit der ich deshalb beginnen muß. Diese feinere Theorie beruht auf dem Begriff der „Funktion von begrenzter Abweichung“ (à écart fini).

[1]) Journal de math. (3) **4** (1878), S. 5—57, 377—417.

[2]) Journal de math. (4) **8** (1892), S. 154—186.

Hadamard nennt eine im Intervall $a \leqq x \leqq b$ stetige Funktion $f(x)$ der reellen Variablen x „von begrenzter Abweichung in diesem Intervall", wenn für jedes in ihm enthaltene Intervall $a \leqq \alpha \leqq x \leqq \beta \leqq b$ die beiden Ausdrücke

$$(2) \qquad n\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\cos nx\,dx \quad \text{und} \quad n\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\sin nx\,dx$$

bei wachsendem n beschränkt sind; er überträgt diese Begriffsbildung sinngemäß auf komplexe Funktionen, die längs der Peripherie des Einheitskreises ausgebreitet sind. Er beweist sodann:

1. Jede Funktion von beschränkter Schwankung ist auch von begrenzter Abweichung. (Ob die Umkehrung hiervon gilt, bleibt unentschieden.)

2. Ist $\Sigma|c_n|$ konvergent und $\lim_{n=\infty} c_n n\lg n = 0$, so stellt (1) eine für $|z| = 1$ endliche, stetige Funktion von begrenzter Abweichung dar.

3. Ist die von (1) dargestellte Funktion auch noch auf $|z| = 1$ selbst definiert, endlich, stetig und von begrenzter Abweichung, so ist für jedes positive ε

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|c_n|}{n^{\varepsilon}} \text{ konvergent} \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} \frac{c_n}{n^{\varepsilon}}\, n\lg n = 0.$$

Die Aussage der Nr. 3 stellt in gewissem Sinne die Umkehrung von derjenigen der Nr. 2 dar. Dieses gegenseitige Verhältnis wird nur dadurch etwas verdeckt, daß Nr. 2 von größerer Feinheit ist als Nr. 3. Um aus dem ganzen Zusammenhange lediglich den übersichtlicheren, gröberen Tatbestand herauszuschälen, erteilt man der Sache zweckmäßig die folgende Wendung.

Man folgert zuerst: Wenn $\sum \frac{c_n}{n^{\varkappa}} z^n$ endlich, stetig und von begrenzter Abweichung ist, so auch $\sum \frac{c_n}{n^{\varkappa+\varepsilon}} z^n$ für jedes $\varepsilon > 0$. Denn zufolge Nr. 3 ist dann $\sum \frac{|c_n|}{n^{\varkappa+\varepsilon}}$ konvergent und $\lim_{n=\infty} \frac{c_n}{n^{\varkappa+\varepsilon}} n\lg n = 0$; es sind daher für die Funktion $\sum \frac{c_n}{n^{\varkappa+\varepsilon}} z^n$ alle Voraussetzungen von Nr. 2 erfüllt; also ist auch sie endlich, stetig und von begrenzter Abweichung. Daraus folgt dann weiter die Existenz eines Dedekindschen Schnittes ω derart, daß $\sum \frac{c_n}{n^{\omega+\varepsilon}} z^n$ für jedes $\varepsilon > 0$ endlich, stetig und von begrenzter Abweichung ist, dagegen für kein $\varepsilon < 0$. Diesen Wert ω nennt Hadamard die „Ordnung der Funktion".

Man erhält daneben einen zweiten Dedekindschen Schnitt ϱ, wenn man bemerkt, daß die beiden Bedingungen

$$(4) \qquad \sum \frac{|c_n|}{n^\varkappa} \text{ konvergent} \quad \text{und} \quad \lim_{n=\infty} \frac{c_n}{n^\varkappa} n \lg n = 0,$$

wenn sie für irgendeinen Wert $\varkappa$ gelten, so auch für jedes größere $\varkappa$. Dieser Wert ϱ charakterisiert also die „Ordnung der Koeffizienten". Und nun kann man offenbar *den gröberen Teil der Theorie von Hadamard in der einfachen Aussage zusammenfassen, daß $\omega = \varrho$ ist.*

Hadamard faßt übrigens noch die beiden Bedingungen (4), die ϱ definieren, zusammen und schreibt einfach (man bestätigt es leicht):

$$(5) \qquad \varrho = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\lg n\,|c_n|}{\lg n} = 1 + \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\lg |c_n|}{\lg n}.$$

Er zeigt endlich, daß in den einfachsten Fällen, wie $(1-z)^{-t}$, seine Wachstumsordnung mit dem übereinstimmt, was man gemeinhin darunter versteht.

Schon Borel[3]) hat bemerkt, daß dies nicht immer der Fall ist; z. B. ist für

$$(6) \qquad f(z) = z + z^4 + z^9 + z^{16} + \ldots$$

offenbar $\varrho = 1$. Andererseits ist, da alle Koeffizienten von (6) positiv oder 0 sind, $M(r) = f(r)$, und es gilt[4])

$$\lim_{r=1} \sqrt{1-r}\,(r + r^4 + r^9 + \ldots) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Wenn also nach Hadamards Theorem hier mit ϱ auch $\omega = 1$ ist, so muß man sagen, daß bei einer Funktion, der man geneigt wäre die Größenordnung $\frac{1}{2}$ zuzuerkennen, die Hadamardsche Wachstumsordnung den Wert 1 hat.

Noch sinnfälliger wird dieser Tatbestand an dem Beispiel der Funktion

$$(7) \qquad f(z) = e^{\frac{z}{z-1}} = e_0 + e_1 z + e_2 z^2 + \ldots.$$

Diese ist für $|z| < 1$ regulär; denn während z den Einheitskreis beschreibt, bewegt sich $t = \frac{z}{z-1}$ auf einer Vertikalen in der t-Ebene mit der Abszisse $+\frac{1}{2}$, $\Re(t) = \frac{1}{2}$; dem Anfangspunkt $z = 0$ entspricht $t = 0$, also dem Inneren des Einheitskreises $|z| < 1$ die linke Halbebene $\Re(t) < \frac{1}{2}$; dort ist e^t überall regulär und dem Betrage nach unter $\sqrt{e}$ gelegen. Nun hat Fejér lange vor seinen neueren eleganten Konstruktionen von stetigen

---

[3]) E. Borel, Leçons sur les séries à termes positives, Paris 1902, S. 77ff. Borels Beispiel weicht von dem angegebenen ab, aber nur unwesentlich.

[4]) Vgl. etwa Cesàro-Kowalewski, Algebraische Analysis, Leipzig 1904, S. 283f.

Funktionen mit divergenter Fourierscher Reihe usw. eine asymptotische Formel für den Koeffizienten e_n der Potenzreihe (7) angegeben[5]):

$$e_n = \sqrt{\frac{e}{\pi}} \frac{\sin\left(\frac{3}{4}\pi + 2\sqrt{n}\right)}{n^{\frac{3}{4}}} + \varepsilon_n, \qquad \text{wo } |\varepsilon_n| \leqq \frac{A}{n} \text{ ist.}$$

Durch eine kurze Überlegung entnimmt man dieser Formel, daß für die Funktion (7) die Hadamardsche Größenordnung der Koeffizienten $\varrho = \frac{1}{4}$ ist, während die Funktion beschränkt ist, so daß man $\omega = 0$ erwartet hätte.

Es sind Beispiele ähnlichen Kalibers, von denen Fabry[6]) ausgegangen ist, als er es unternahm, der Hadamardschen Theorie eine neue an die Seite zu stellen, die den geläufigen Begriff der Wachstumsordnung in allen Fällen wiedergibt; seine Beispiele unterscheiden sich von der Funktion (7) nur dadurch, daß die Koeffizienten der Potenzentwicklung mit einem einfachen Gesetz gegeben werden, das dem Hauptteil der asymptotischen Formel von Fejér sehr ähnelt, während dafür das Verhalten der dargestellten Funktion asymptotisch abgeschätzt werden muß. Fabry entnimmt diesen Beispielen von vornherein, daß es nicht angeht, allein aus den *Beträgen* der Koeffizienten das Wachstum der Funktion zu charakterisieren. Er knüpft an die Definition des Hadamardschen ϱ in der Gestalt (4) an: der erste der beiden Ausdrücke (4) kann als eine Dirichletsche Reihe betrachtet werden; aus dieser Betrachtungsweise ergibt sich, daß die Abszisse *absoluter* Konvergenz Q der Dirichletschen Reihe

$$\sum \frac{c_n}{n^s} \tag{8}$$

jedenfalls nicht kleiner als ϱ sein kann (wegen der noch hinzutretenden zweiten Hälfte der Bedingung (4)). Fabry betrachtet nun statt dessen die Abszisse p *bedingter* Konvergenz der Reihe (8). Ich übergehe hier den sehr inhaltreichen Teil seiner Erörterungen, der den Zusammenhang von p mit dem Wachstum der Funktion an der Stelle $z = 1$ behandelt, da sie das Wachstum von $M(r)$ nur mittelbar betreffen. Um dieses letztere zu bewältigen, betrachtet Fabry die Reihe

$$\sum \frac{c_n}{n^s} e^{ni\vartheta} \tag{9}$$

für alle reellen ϑ; er erkennt, daß es nicht ausreicht, für jedes einzelne ϑ ihre Abszisse bedingter Konvergenz $p(\vartheta)$ zu nehmen und sodann die obere Grenze aller $p(\vartheta)$, sondern er zeigt, daß man einen solchen (eventuell

[5]) C. R. **147**, S. 1040–1042 (30. 11. 1908); Mathematikai és természettudományi értesitö **27** (1909); vgl. auch Perron, Archiv (3) **22**, S. 329–340.

[6]) Acta math. **36** (1913), S. 69–104.

größeren, aber unter Q gelegenen) Wert q ins Auge fassen muß, für den jene bedingte Konvergenz *gleichmäßig* wird in bezug auf alle ϑ.

Ich kann in dieser Theorie, die einen sehr wesentlichen Einblick in den Sachverhalt bietet, dennoch keine abschließende Lösung des Problems erblicken. Im Grunde wird dasselbe nur in das andere Problem transformiert, die Abszisse gleichmäßiger Konvergenz des Ausdrucks (9) zu ermitteln, ein Problem, das in seiner Allgemeinheit nicht einfacher ist als das ursprünglich hier vorliegende. Allerdings ist in Fabrys Theorie der folgende merkwürdige Satz inbegriffen: „Die Wachstumsordnung von

$$g(s) = 1^s c_1 z + 2^s c_2 z^2 + 3^s c_3 z^3 + \dots \qquad (s > 0)$$

ist genau um s größer als die von

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$$

Aber dieser Satz leitet sich in einfacher und natürlicher Weise auch aus meiner Theorie ab und verschärft sich dabei, soweit es die Natur der Sache erlaubt; dadurch scheint mir die Stellung der neuen Theorie zu ihrer Vorgängerin auf die deutlichste Art klargestellt.

Ich lege dieser neuen Theorie, abgesehen von der Formulierung, den gleichen Begriff des *Wachstumsexponenten ω der Funktion* wie Fabry zugrunde. Ich knüpfe, um es unabhängig von dem über Fabry Gesagten zu präzisieren, an die Funktion $M(r)$ an und an die Tatsache, daß mit

$$M(r) \leqq \frac{A}{(1-r)^{\varkappa}} \quad \text{auch} \quad M(r) \leqq \frac{A}{(1-r)^{\varkappa+\varepsilon}}$$

für jedes positive ε gilt, und definiere als „Wachstumsexponenten der Funktion" den Dedekindschen Schnitt ω, für den

$$M(r) \leqq \frac{A}{(1-r)^{\omega+\varepsilon}} \tag{10}$$

für alle $\varepsilon > 0$ gilt, dagegen für kein $\varepsilon < 0$. Natürlich kann ω die Extremwerte 0 und ∞ haben. Es ist also

$$\omega = \overline{\lim_{r=1}} \frac{\lg M(r)}{\lg \frac{1}{1-r}}.$$

Dagegen wird der *Wachstumsexponent ϱ der Koeffizienten* in ganz anderer Weise charakterisiert als bei Hadamard und Fabry. Ich bilde aus den ersten n Koeffizienten von (1) die Bilinearform von $2n$ Veränderlichen

$$P_n(x,y) = c_0(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n) + c_1(x_1 y_2 + \dots + x_{n-1} y_n) + \dots + c_{n-1} x_1 y_n; \tag{11}$$

ich bilde das Maximum Π_n von $|P_n(x,y)|$ unter den beiden Nebenbedingungen

$$(12)\qquad \begin{cases} (12\,a) & x_1\bar{x}_1+\ldots+x_n\bar{x}_n=1\,,^{7}) \\ (12\,b) & y_1\bar{y}_1+\ldots+y_n\bar{y}_n=1\,, \end{cases}$$

und ferner das Maximum Π_n' von $P_n(x,\bar{x})$ unter der Nebenbedingung (12a). Man bemerkt leicht, daß die Π_n und ebenso die Π_n' mit n monoton wachsen, daß $\Pi_n' \leqq \Pi_n$ ist; Π_n und Π_n' sind übrigens die größten Wurzeln gewisser leicht aufzustellender Gleichungen n-ten Grades; es gilt endlich genauer[8])

$$\tfrac{1}{2}\Pi_n \leqq \Pi_n' \leqq \Pi_n\,,$$

woraus hervorgeht, daß der Wachstumsexponent der Größen Π_n und Π_n' der gleiche ist. Diesen Wachstumsexponenten, d. h. also den Exponenten ϱ, für den

$$(13)\qquad \Pi_n \leqq An^{\varrho+\varepsilon} \quad \text{und} \quad \Pi_n' \leqq Bn^{\varrho+\varepsilon}$$

bei positivem ε gilt, bei negativem ε nicht gilt, nehme ich als den „Wachstumsexponenten der Koeffizienten". Es ist also

$$\varrho = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\lg \Pi_n}{\lg n} = \overline{\lim_{n=\infty}} \frac{\lg \Pi_n'}{\lg n}\,.$$

Die Grundtatsache meiner Theorie findet dann wiederum *ihren einfachen Ausdruck in der Aussage, daß* $\omega = \varrho$ *ist*[9]).

In der in kurzem folgenden Fortsetzung dieser Arbeit werde ich zeigen, wie die Sätze von Hadamard und Fabry sich aus meiner Theorie ableiten und wie sonst die Untersuchung der groben Wachstumsordnung ω aus ihr neue Einsichten entnehmen kann. Indessen die eigentliche Bedeutung der Größen Π_n und Π_n' liegt darin, daß sie berufen sind, die Wachstumsordnung der Funktion in einer viel größeren Feinheit wiederzugeben. Erst von hier aus kann ich motivieren, weshalb ich die Größen Π_n und Π_n' ins Auge fasse. Ich habe sie zuerst in meiner Habilitationsschrift[10]) betrachtet und bewiesen[11]), daß $f(z)$ dann und nur dann beschränkt ist, wenn die Π_n es sind, und genauer, daß dann

$$(14)\qquad \lim_{n=\infty} \Pi_n' = \lim_{n=\infty} \Pi_n = M(1)$$

---

[7]) Überstreichen möge hier wie stets im folgenden den Übergang zu den konjugiert-imaginären Größen bedeuten.

[8]) Vgl. meine Arbeit Math. Zeitschr. 2 (1916), S. 192.

[9]) Beide Buchstaben sind hier natürlich in einem ganz anderen Sinne verstanden als bei der Erörterung der Hadamardschen Theorie.

[10]) Math. Ann. 70 (1911), S. 351–376.

[11]) Gött. Nachr., Math.-phys. Klasse, 1910, S. 489–506, § 4.

gilt. Es ist aber klar, daß Größen, die die Wachstumsordnung von $f(z)$ in voller Feinheit wiedergeben sollen, die erste Pflicht haben, im Falle der Beschränktheit der Funktion sich so zu verhalten, wie es eben von den Π_n und Π_n' beschrieben wurde. Diese sind also die gegebenen Größen für jede feinere Theorie[12]). Und schon die Schlüsse dieser Arbeit genügen z. T., um dieses weit größere Ziel ungefähr zu erreichen; ich greife nur aus § 1 das Resultat

$$\Pi_n \leqq eM\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

heraus, das weit schärfer ist, als es für das abgeleitete grobe Resultat erforderlich wäre. Eine weitere Fortsetzung der vorliegenden Arbeit wird von dieser feineren und von einer erst jenseits von ihr errichtbaren feinsten Theorie handeln.

Der Anlaß, der mich zur Aufstellung aller dieser Theorien geführt hat, liegt allerdings an einer anderen Stelle, in der Theorie der Dirichletschen Reihen. In einer anderen, demnächst erscheinenden Arbeit werde ich die den Π_n analogen Bildungen Δ_n aufweisen, deren Beschränktheit für die Beschränktheit der von einer Dirichletschen Reihe $\sum \frac{c_n}{n^s}$ dargestellten Funktion in der rechten Halbebene charakteristisch ist; und aus diesen Δ_n weiterhin das Wachstum der Funktion, falls sie nicht beschränkt ist, zu erkennen, und damit die Wachstumsordnungen längs vertikaler Geraden, die in der Lehre von der Verteilung der Primzahlen eine solche Rolle spielen, aus den Koeffizienten zu charakterisieren, ist das eigentliche Ziel dieser Betrachtungen. Ich glaubte aber, die einfachere Wachstumstheorie der Potenzreihen vorangehen lassen zu sollen.

Hilbertsche Begriffsbildungen stehen im Hintergrunde aller dieser Betrachtungen: die Bilinearform von unendlichvielen Veränderlichen und ihre Abschnittsmaxima. Übrigens sind die Entwicklungen dieser Arbeit

---

[12]) Es ist vielleicht nicht überflüssig zu bemerken, daß man die Größen Π_n' (darin sind sie den Π_n überlegen) rein funktionentheoretisch charakterisieren kann. Man kann nämlich der bekannten Carathéodoryschen Theorie der Potenzreihen mit positivem reellen Teil infolge des Zusammenhanges, den ich zwischen dieser Theorie und derjenigen der Formen $P_n(x, y)$ hergestellt habe, die sonst nirgends in dieser Form ausgesprochene Folgerung entnehmen: Sei $\mathfrak{W}_n$ der „Wertvorrat" der Form $P_n(x, \bar{x})$ (im Sinne meiner Arbeit Math. Zeitschr. 2), und sei andererseits $\mathfrak{B}(f)$ der kleinste konvexe Bereich, den man um den Wertvorrat von $f(z)$ für $|z|<1$ herumlegen kann, und $\mathfrak{W}$ der Durchschnitt aller Bereiche $\mathfrak{B}(f)$ für alle Potenzreihen $f(z)$, die für $|z|<1$ konvergieren und die gleichen ersten n Koeffizienten $c_0, \ldots, c_{n-1}$ haben, so ist $\mathfrak{W}=\mathfrak{W}_n$. Damit ist $\mathfrak{W}_n$ rein funktionentheoretisch charakterisiert, und Π_n' ist lediglich der Radius des kleinsten Kreises um 0, der $\mathfrak{W}_n$ umschließt.

und der ihr folgenden unabhängig von der Theorie der unendlichvielen Veränderlichen und enthalten nebenbei eine neue, direkte Ableitung des oben erwähnten Ergebnisses meiner Habilitationsschrift. Solche direkten Ableitungen sind seither schon mehrfach gegeben worden[13]), und der § 1 dieser Arbeit beruht wesentlich auf der Methode des Herrn Szász; sie mußte jedoch für den veränderten Zweck nochmals dargestellt werden.

§ 1.

Die Abschätzung von oben.

Sei die Potenzreihe (1) für $|z|<1$ konvergent, so gilt

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z^n}\frac{dz}{z},$$

wenn die Integration im positiven Umlaufssinne über einen Kreis vom Radius $r<1$ erstreckt wird. Daraus folgt

$$\begin{aligned} P_n(x,y) &= \frac{1}{2\pi i}\int f(z)\frac{dz}{z}(x_1y_1+\ldots+x_ny_n) \\ &+\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z}\frac{dz}{z}(x_1y_2+\ldots+x_{n-1}y_n)+\ldots+\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z^{n-1}}\frac{dz}{z}(x_1y_n) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int f(z)\Big\{(x_1y_1+\ldots+x_ny_n) \\ &+\frac{1}{z}(x_1y_2+\ldots+x_{n-1}y_n)+\ldots+\frac{1}{z^{n-1}}(x_1y_n)\Big\}\frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

Da andererseits für $n>0$ nach dem Cauchyschen Satze

$$\int f(z)z^n\frac{dz}{z}$$

verschwindet, kann dieser Ausdruck für $P_n(x,y)$ in der folgenden Weise verändert werden:

$$\begin{aligned} P_n(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int f(z)\Big\{&(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)+\frac{1}{z}(x_1y_2+\ldots+x_{n-1}y_n)+\ldots+\frac{1}{z^{n-1}}(x_1y_n) \\ &+z(x_2y_1+\ldots+x_ny_{n-1})+\ldots+z^{n-1}(x_ny_1)\Big\}\frac{dz}{z} \end{aligned}$$

und in dieser Gestalt ist die Parenthese das Produkt zweier Linearformen:

$$\begin{aligned} P_n(x,y) &= \frac{1}{2\pi i}\int f(z)[x_1+x_2z+\ldots+x_nz^{n-1}]\Big[y_1+y_2\frac{1}{z}+\ldots+y_n\frac{1}{z^{n-1}}\Big]\frac{dz}{z} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int f(z)[x_1+x_2z+\ldots+x_nz^{n-1}][y_n+y_{n-1}z+\ldots+y_1z^{n-1}]\frac{1}{z^{n-1}}\frac{dz}{z} \end{aligned}$$

---

[13]) I. Schur, Journ. f. Math. **147** (1916), S. 226; O. Szász, Math. Zschr. **1** (1918), S. 163 ff.

Nun hat O. Szász[14]) die Bemerkung gemacht, daß Bilinearformen vom Typus $P_n(x, y)$ ihr Maximum Π_n für solche Werte der beiden Reihen von Veränderlichen erreichen, für die

(14) $$y_1 = x_n,\ y_2 = x_{n-1},\ \ldots,\ y_n = x_1$$

ist. Bezeichnet also $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ ein solches Wertsystem, für das $|P_n(x, y)|$ den Wert Π_n tatsächlich erreicht und das zugleich (12) und (14) genügt, so gilt

$$\Pi_n = \frac{1}{2\pi i}\int f(z)[x_1 + x_2 z + \ldots + x_n z^{n-1}]^2 \frac{1}{z^{n-1}}\frac{dz}{z}.$$

Die Integration war nach wie vor über $|z| = r < 1$ erstreckt gedacht. Längs dieses Kreises ist $|f(z)| \leqq M(r)$, daher nach dem ersten Mittelwertsatze der Integralrechnung

$$\Pi_n \leqq \frac{1}{2\pi} M(r)\int |x_1 + x_2 z + \ldots + x_n z^{n-1}|^2 \frac{1}{r^{n-1}}\left|\frac{dz}{z}\right|.$$

Nun ist

$$|x_1 + x_2 z + \ldots + x_n z^{n-1}|^2$$
$$= (x_1 + x_2 z + \ldots + x_n z^{n-1})(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \bar{z} + \ldots + \bar{x}_n \bar{z}^{n-1}),$$

daher, wenn $z = r e^{i\varphi}$ gesetzt wird,

$$(r)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x_1 + x_2 r e^{i\varphi} + \ldots + x_n r^{n-1} e^{(n-1)i\varphi})(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 r e^{-i\varphi} + \ldots + \bar{x}_n r^{n-1} e^{-(n-1)i\varphi})\frac{d\varphi}{r^{n-}}$$

$$(r)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 r^2 + \ldots + x_n\bar{x}_n r^{2n-2}) + \left\{\begin{matrix}\ldots + x_1\bar{x}_n e^{-(n-1)i\varphi} \\ \ldots + \bar{x}_1 x_n e^{(n-1)i\varphi}\end{matrix}\right\}\frac{d\varphi}{r^{n-1}}.$$

Da $\int_0^{2\pi} e^{hi\varphi} d\varphi = \frac{1}{hi}[e^{hi\varphi}]_0^{2\pi} = 0$ für $h \neq 0$ und ganz, $= 2\pi$ für $h = 0$ ist,

fallen, wenn man das Integral zerteilt, alle Klammerausdrücke bis auf den ersten fort, und es bleibt:

$$\Pi_n \leqq M(r)\frac{1}{r^{n-1}}(x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 r^2 + \ldots + x_n\bar{x}_n r^{2n-2}).$$

Wegen $r < 1$ und wegen (12a) ist die Klammer $\leqq 1$, daher

(15) $$\Pi_n \leqq \frac{1}{r^{n-1}} M(r).$$

Das ist das eigentliche Theorem, aus dem alles weitere sofort folgt. Ist zuerst $|f(z)|$ beschränkt, $\leqq M$, so ist $M(r) \leqq M$, und man hat für

[14]) A. a. O., S. 169 und 170.

jedes $r<1$ die Ungleichung $\Pi_n \leqq \frac{M}{r^{n-1}}$, daher im Grenzfall $\Pi_n \leqq M$, d. i. die eine Hälfte des erwähnten Satzes meiner Habilitationsschrift.

Ist aber $f(z)$ nicht beschränkt, so wähle man r, das in (15) noch ganz willkürlich <1 ist, $=1-\frac{1}{n}$; dann folgt:

$$\Pi_n \leqq M\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}}.$$

Nun ist

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < e = 2{,}71\ldots,$$

daher

$$\Pi_n \leqq eM\left(1-\frac{1}{n}\right). \tag{16}$$

Sei ω die Wachstumsordnung von $f(z)$, also $M(r) \leqq \frac{A}{(1-r)^{\omega+\varepsilon}}$ für jedes $\varepsilon>0$, so folgt für $r=1-\frac{1}{n}$ speziell $M\left(1-\frac{1}{n}\right) \leqq An^{\omega+\varepsilon}$, also $\Pi_n \leqq eAn^{\omega+\varepsilon}$. *Das bedeutet aber* $\varrho \leqq \omega$.

§ 2.

Die Abschätzung von unten.

Ich schicke drei einfache Bemerkungen voran.

1. *Wird*

$$t_n = c_0 + \frac{n-1}{n}c_1 + \frac{n-2}{n}c_2 + \ldots + \frac{1}{n}c_{n-1}$$

gesetzt, so ist $|t_n| \leqq \Pi_n' \leqq \Pi_n$.

Denn sei

$$x_1 = \ldots = x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} = y_1 = \ldots = y_n, \tag{17}$$

so sind die Nebenbedingungen (12) erfüllt und $P_n(x, y)$ erhält den Wert t_n. Da bei dem Wertsystem (17) überdies $y_\alpha = \bar{x}_\alpha$ ist, folgt, daß $|t_n|$ nicht nur unter Π_n, sondern sogar unter Π_n' gelegen ist.

2. *Für die Potenzreihe*

$$g(z) = c_0 + c_1\eta z + c_2\eta^2 z^2 + \ldots, \quad |\eta| = 1$$

sind die Maxima $\Pi_n(g)$ *und* $\Pi_n'(g)$ *die nämlichen wie* $\Pi_n(f)$ *bzw.* $\Pi_n'(f)$.

Die Bilinearform $P_n(f)$ geht nämlich durch die Transformation

$$x_1' = x_1,\ x_2' = \bar{\eta}x_2,\ \ldots,\ x_n' = \bar{\eta}^{n-1}x_n; \quad y_1' = y_1,\ y_2' = \eta y_2,\ \ldots,\ y_n' = \eta^{n-1}y_n$$

n die Form $P_n(g)$ über, und da diese Transformation die Bedingungen 12) invariant läßt, muß $\Pi_n(g) = \Pi_n(f)$, $\Pi_n'(g) = \Pi_n'(f)$ sein.

3. *Haben t_n die Bedeutung von Nr. 1, so ist*

18) $$f(z) = (1-z)^2(t_1 + 2t_2 z + 3t_3 z^2 + \ldots),$$

und es ist zugleich

19) $$1 = (1-z)^2(1 + 2z + 3z^2 + \ldots).$$

(18) ist eine rein formale Konsequenz der Bemerkung, daß

$$n t_n - (n-1)t_{n-1} = c_0 + \ldots + c_{n-1} = s_n,$$

$$s_n - s_{n-1} = c_n,$$

also

$$c_n = n t_n - 2(n-1)t_{n-1} + (n-2)t_{n-2}$$

ist; setzt man in $f(z) = \Sigma c_n z^n$ für c_n diesen Ausdruck ein, so resultiert 18). (19) ergibt sich aus (18), wenn man (18) auf die spezielle Funktion $f(z) = 1$ anwendet, bei der alle $t_n = 1$ sind.

Auf Grund dieser drei Vorbemerkungen ergibt sich jetzt sehr einfach der

Beweis. Sei $f(z)$ für $|z| < 1$ regulär und sei zunächst z reell-positiv, $= r$, so ist wegen der dritten und ersten Vorbemerkung

$$|f(r)| \leqq (1-r)^2(\Pi_1' + 2r\Pi_2' + 3r^2\Pi_3' + \ldots).$$

Ist aber z nicht reell-positiv, sondern $= re^{i\varphi}$, so setze man $e^{i\varphi} = \eta$ und wende die zweite Vorbemerkung an; dann folgt, daß auch für diesen Arcus

$$|f(z)| \leqq (1-r)^2(\Pi_1' + 2r\Pi_2' + 3r^2\Pi_3' + \ldots),$$

wofern $|z| \leqq r$. Mithin ist auch

20) $$M(r) \leqq (1-r)^2(\Pi_1 + 2r\Pi_2' + 3r^2\Pi_3' + \ldots).$$

Dies ist wiederum das eigentliche Theorem.

Ist nun zuerst Π_n' beschränkt, $\leqq \Pi'$, so folgt

$$M(r) \leqq \Pi'(1-r)^2(1 + 2r + 3r^2 + \ldots),$$

und dies ist wegen (19) $= \Pi'$; damit ist die andere Hälfte jenes Theorems aus meiner Habilitationsschrift bewiesen[15]).

Ist aber Π_n' nicht beschränkt, jedoch $\Pi_n' \leqq A n^\varkappa$, so folgt aus (20)

$$M(r) \leqq A(1-r)^2(1^\varkappa + 2r \cdot 2^\varkappa + 3r^2 \cdot 3^\varkappa + \ldots)$$
$$\leqq A(1-r)^2(1^{\varkappa+1} + 2^{\varkappa+1}r + 3^{\varkappa+1}r^2 + \ldots).$$

[15]) Vgl. auch Landau, Neuere Ergebnisse der Funktionentheorie 1916, § 1 (Springer, Berlin).

Nun ist bekanntlich[16])

$$\Sigma n^{\alpha} x^n \sim \Gamma(\alpha+1)\frac{1}{(1-x)^{\alpha+1}} \qquad (\alpha > -1),$$

also für $\alpha = \varkappa + 1$

$$\Sigma n^{\varkappa+1} r^n \sim \Gamma(\varkappa+2)\frac{1}{(1-r)^{\varkappa+2}},$$

daher

$$M(r) \leqq A\,\Gamma(\varkappa+2)\frac{1}{(1-r)^{\varkappa}}.$$

Dies besagt $\omega \leqq \varrho$. In Verbindung mit dem Endergebnis von § 1 ist also die Grundtatsache $\omega = \varrho$ bewiesen.

---

[16]) Vgl. z. B. Hardy, Ordres of infinity, Cambr. Tracts Nr. 12 (1910), Cambr. University Press, S. 56f., oder Cesàro-Kowalewski, S. 285.

Kiel, den 17. September 1921.

(Eingegangen am 19. September 1921.)

ntersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper.

Zweite Abhandlung[1]).

Eine aus zwei getrennten Massen bestehende Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit.

Von

Leon Lichtenstein in Münster i. W.

Inhaltsübersicht.

§ 1. Problemstellung.
§ 2. Die fundamentalen Integro-Differentialgleichungen des Problems.
§ 3. Auflösung der Integro-Differentialgleichungen des Problems.
§ 4. Stabilität der Gleichgewichtsfigur.

§ 1.

Problemstellung.

Wir beziehen die Lage der Punkte im Raume auf ein kartesisches oordinatensystem x_0, y_0, z_0 (Fig. 1). Sei T eine Kugel vom Halb-

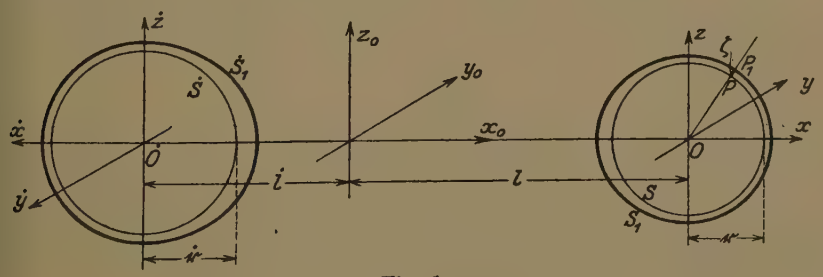

Fig. 1.

esser r, deren Mittelpunkt O die Koordinaten l, 0, 0 ($l > 0$) hat; ihre berfläche heiße S. Sei $\dot{T}$ eine weitere Kugel vom Halbmesser $\dot{r}$ um

[1]) Man vergleiche hierzu L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gestalt r Himmelskörper. Erste Abhandlung. Die Laplacesche Theorie der Gestalt des dmondes. Math. Zeitschr. **10** (1921), S. 130–159.

den Punkt $\dot{O}$ $(-\dot{l}, 0, 0)$ $(\dot{l} > 0)$, ihre Oberfläche heiße $\dot{S}$. Es mögen ferner S_1 und $\dot{S}_1$ zwei Flächen mit stetiger Normale in einer Umgebung erster Ordnung von S und $\dot{S}$ bezeichnen. Die von ihnen begrenzten Körper T_1 und $\dot{T}_1$ denken wir uns mit homogener gravitierender Flüssigkeit der Dichte f und $\dot{f}$ erfüllt. Die beiden Körper und die Koordinatenachsen sollen mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die z_0-Achse gleichförmig rotieren. *Gibt es für große l und $\dot{l}$ und in geeigneter Weise gewählte Werte von ω Flächen S_1 und $\dot{S}_1$, so daß das System T_1 und $\dot{T}_1$ sich im relativen Gleichgewichte befindet*[2])?

Die Ergebnisse und Methoden der bekannten Arbeiten von A. Liapounoff sowie meiner vor einiger Zeit veröffentlichten Arbeiten über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten gestatten diese Frage in bejahendem Sinne zu beantworten. Der Existenzbeweis hängt mit der Auflösung eines gewissen Systems nichtlinearer Integro-Differentialgleichungen zusammen. Das zugehörige System charakteristischer linearer homogener Integralgleichungen besitzt nichttriviale Nullösungen. Es liegt demnach, wie bei der Laplaceschen Theorie des Erdmondes, der Verzweigungsfall vor, so daß eigentlich gewisse „Verzweigungsgleichungen" ins einzelne untersucht werden müßten. Die hiermit verbundenen außerordentlich umständlichen, zum Teil ziffermäßigen Rechnungen lassen sich indessen, wie ich neuerdings erkannt habe, vermeiden, wenn man in den Ausdruck für die Winkelgeschwindigkeit Parameter einführt und diese nachträchlich in geeigneter Weise bestimmt. Hierdurch läßt sich nicht nur der Existenzbeweis der in dieser Arbeit betrachteten Gleichgewichtsfiguren ohne weitere Komplikationen zu Ende führen, sondern auch die Behandlung anderer Gleichgewichtsfiguren, wie z. B. der ringförmigen Figuren ohne Zentralkörper, ganz wesentlich vereinfachen. Insbesondere läßt sich die von mir bei der Behandlung des Erdmondes durchgeführte Diskussion der Verzweigungsgleichung ganz vermeiden.

Da die Auflösung der Integro-Differentialgleichungen des Problems, die durch sukzessive Approximationen zu erfolgen hat, keine neuen Schwierigkeiten bietet, so wird sie im folgenden nicht näher ausgeführt. Das methodische Interesse konzentriert sich auf die Aufstellung der Hauptgleichungen und, wie vorhin ausgeführt, die Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit.

Die neue Gleichgewichtsfigur ist in einem in § 4 näher auseinandergesetzten Sinne als *stabil* zu bezeichnen.

---

[2]) Es handelt sich ersichtlich um *flüssige Doppelsterne*, deren gegenseitige Entfernung als sehr groß vorausgesetzt wird.

Wir denken uns durch O und $\dot{O}$ neue um die z_0-Achse mitrotierende oordinatenachsen x, y, z und $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ gelegt, so daß

) $x_0 = x + l, \quad y_0 = y, \quad z_0 = z; \qquad x_0 = -\dot{x} - \dot{l}, \quad y_0 = -\dot{y}, \quad z_0 = \dot{z}$

t. Sei $P_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$ ein Punkt auf S_1 und es sei $P = (X, Y, Z)$ r Fußpunkt des von P_1 auf S gefällten Lotes (ν). Die Strecke $\overrightarrow{PP_1}$, sitiv nach außen gerichtet, sei mit ζ bezeichnet. Ist die Lage der nkte auf S durch irgendein System Gaußscher Parameter (ξ, η) finiert, so kann man für hinreichende kleine Werte von $|\zeta|$, etwa $|\zeta| < \varepsilon^*$, die Lage des Punktes P_1 in eindeutiger Weise durch das stem der krummlinigen Koordinaten ξ, η, ζ bestimmen. In einer ganz nalogen Weise soll die Lage eines gewissen Punktes $\dot{P}_1 = (\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{Z}_1)$ f $\dot{S}_1$ durch das System der krummlinigen Koordinaten $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$ gegeben in $(|\dot{\zeta}| < \varepsilon^*)$. Wir dürfen annehmen, daß die Funktionen ζ und $\dot{\zeta}$ ein- utig sind und stetige Ableitungen erster Ordnung haben.

Die Entfernung der beiden Punkte O und $\dot{O}$ sei zur Vereinfachung it L,

) $$L = l + \dot{l},$$

e Volumina der beiden Kugeln seien mit

) $$v = \frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}^3, \qquad \dot{v} = \frac{4\pi}{3}\dot{\mathfrak{r}}^3$$

zeichnet. Die auf T_1 wirkenden Kräfte sind: die Eigengravitation, die entrifugalkräfte und die Anziehung des Körpers $\dot{T}_1$. Ist $\varkappa$ die Gauß- he Gravitationskonstante, so ist das Potential der beiden zuerst ge- annten Kräfte im Punkte X_1, Y_1, Z_1 entsprechend gleich

) $$\varkappa f V_1(X_1, Y_1, Z_1) = \varkappa f \int_{T_1} [(\bar{x} - X_1)^2 + (\bar{y} - Y_1)^2 + (\bar{z} - Z_1)^2]^{-\frac{1}{2}} d\bar{x}\, d\bar{y}\, d\bar{z}$$

nd

) $$\frac{\omega^2}{2}(Y_1^2 + (l + X_1)^2).$$

Um das Potential der Anziehung des Körpers $\dot{T}_1$ auf T_1 zu be- immen, müssen wir noch einige weitere Bezeichnungen einführen.

Wir bezeichnen den Punkt ξ, η auf S mit σ, das Flächenelement in mit $d\sigma$, die nach außen gerichtete Normale durch σ mit (ν). Die ent- prechenden zu dem Punkte (ξ', η') gehörigen Werte werden mit einem kzent oben gekennzeichnet. Der Abstand der Punkte σ, σ' heiße ϱ. s seien weiter a, b, c die Richtungskosinus der Normale (ν),

) $$a = \frac{X}{\mathfrak{r}}, \qquad b = \frac{Y}{\mathfrak{r}}, \qquad c = \frac{Z}{\mathfrak{r}}.$$

Die analogen Werte auf $\dot{S}$ werden mit einem Punkt oben versehen.

Neben den Flächen S und S_1 betrachten wir die einparametrige Flächenschar S_t $(0 \leqq t \leqq 1)$, die sich symbolisch in der Form $S + t(S_1 - S)$ darstellen läßt; dem Punkte $P = (\xi, \eta)$ auf S entspricht dabei auf S_t ein Punkt P_t mit den krummlinigen Koordinaten $\xi, \eta, t\zeta$. Sei φ_t der von der Normale (ν_t) in P_t an S_t mit der Gerade (ν) eingeschlossene Winkel [3]) und $d\sigma_t$ das Flächenelement von S_t an derselben Stelle. Die entsprechenden zu den Flächen $\dot{S}$ und $\dot{S}_1$ gehörigen Größen sollen wieder durch einen Punkt oben gekennzeichnet werden.

Das von den beiden Flächen $\dot{S}_i$ und $\dot{S}_{i+di}$ und den Normalen an $\dot{S}$ durch den Rand des Flächenelementes $d\dot{\sigma}$ begrenzte Volumelement hat augenscheinlich den Wert $\dot{\zeta}\, di \cos\dot{\varphi}_i\, d\dot{\sigma}_i$. Sein Abstand von dem Punkte X_1, Y_1, Z_1 ist, wie man leicht sieht, gleich

$$(7)\quad [(L + X_1 + \dot{X} + \dot{a}i\dot{\zeta})^2 + (Y_1 + \dot{Y} + \dot{b}i\dot{\zeta})^2 + (Z_1 - \dot{Z} - \dot{c}i\dot{\zeta})^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Das Potential der von $\dot{S}$ und $\dot{S}_1$ eingeschlossenen Flüssigkeitsschale im Punkte X_1, Y_1, Z_1 ist darum gleich

$$(8)\quad \varkappa \dot{f} \int_0^1 di \int_{\dot{S}_i} \dot{\zeta} \cos\dot{\varphi}_i\, d\dot{\sigma}_i [(L + X_1 + \dot{X} + \dot{a}i\dot{\zeta})^2 + (Y_1 + \dot{Y} + \dot{b}i\dot{\zeta})^2 + (Z_1 - \dot{Z} - \dot{c}i\dot{\zeta})^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

Dazu kommt noch das Potential der Kugel $\dot{T}$. Dieses hat den Wert

$$(9)\quad \varkappa \dot{v} \dot{f} [(L + X_1)^2 + Y_1^2 + Z_1^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

Die entsprechenden Werte im Punkte $\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{Z}_1$ auf $\dot{S}_1$ erhält man, wenn man in (8) und (9) sinngemäß die nichtpunktierten und die punktierten Buchstaben miteinander vertauscht.

§ 2.

Die fundamentalen Integro-Differentialgleichungen des Problems.

Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß S_1 und $\dot{S}_1$ eine Figur des relativen Gleichgewichts einschließen, lassen sich durch die Gleichung

$$\varkappa f V_1(X_1, Y_1, Z_1) + \frac{\omega^2}{2}(Y_1^2 + (l + X_1)^2) + \varkappa \dot{v} \dot{f} [(L + X_1)^2 + Y_1^2 + Z_1^2]^{-\frac{1}{2}}$$

$$(10)\quad + \varkappa \dot{f} \int_0^1 di \int_{\dot{S}_i} \dot{\zeta} \cos\dot{\varphi}_i\, d\dot{\sigma}_i [(L + X_1 + \dot{X} + \dot{a}i\dot{\zeta})^2 + (Y_1 + \dot{Y} + \dot{b}i\dot{\zeta})^2 + (Z_1 - \dot{Z} - \dot{c}i\dot{\zeta})]^{-\frac{1}{2}} = C \qquad (C \text{ konstant})$$

und eine analoge Gleichung, die man erhält, wenn man in (10) nicht-

[3]) Offenbar ist φ_t für $t = 0$ gleich Null.

nktierte Buchstaben mit den punktierten vertauscht, ausdrücken. Sei (x, y, z) das Newtonsche Potential der Kugel S. Augenscheinlich ist

11) $$V(X, Y, Z) = C_1 \qquad (C_1 \text{ konstant}).$$

Für (10) kann man darum auch schreiben

12) $$\varkappa f[V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V(X, Y, Z)] + \frac{\omega^2}{2}[Y_1^2 + (l + X_1)^2]$$
$$- \varkappa \dot{v} \dot{f}[(L + X_1)^2 + Y_1^2 + Z_1^2]^{-\frac{1}{2}} + \varkappa \dot{f} \int_0^1 d\dot{\imath} \int_{\dot{s}_i} \dot{\zeta} \cos \dot{\varphi}_i d\dot{\sigma}_i [(L + X_1 + \dot{X} + \dot{a}\dot{\imath}\dot{\zeta})^2$$
$$+ (Y_1 + \dot{Y} + \dot{b}\dot{\imath}\dot{\zeta})^2 + (Z_1 - \dot{Z} - \dot{c}\dot{\imath}\dot{\zeta})^2]^{-\frac{1}{2}} = \varkappa f s \qquad (s \text{ konstant}).$$

Wir setzen

13) $$V_1(X_1, Y_1, Z_1) = U_1(\xi, \eta), \qquad V(X, Y, Z) = U(\xi, \eta);$$
$$\dot{V}_1(\dot{X}_1, \dot{Y}_1, \dot{Z}_1) = \dot{U}_1(\dot{\xi}, \dot{\eta}), \qquad \dot{V}(\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}) = \dot{U}(\dot{\xi}, \dot{\eta})$$

nd nehmen

14) $$|\zeta|, \quad \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}\right|, \quad \left|\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}\right|; \qquad |\dot{\zeta}|, \quad \left|\frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \dot{\xi}}\right|, \quad \left|\frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \dot{\eta}}\right| < \varepsilon \leqq \varepsilon^*$$

n, unter ε eine hinreichend kleine positive Zahl verstanden. Wie ich an ner anderen Stelle gezeigt habe, läßt sich der Ausdruck

15) $$V_1(X_1, Y_1, Z_1) - V(X, Y, Z) = U_1(\xi, \eta) - U(\xi, \eta)$$

eine nach Gliedern verschiedener Ordnung in bezug auf ζ, $\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ rtschreitende, gleichmäßig konvergierende Reihe,

16) $$U_1(\xi, \eta) - U(\xi, \eta) = U^{(1)} + U^{(2)} + \ldots,$$

twickeln[4]). Hier bezeichnet $U^{(n)}$ in naheliegender Schreibweise den fol- enden Integralausdruck n-ten Grades in bezug auf ζ, ζ' und $\frac{d\zeta'}{ds'}$[5]):

[4]) Siehe L. Lichtenstein, „Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren tierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze ziehen. Erste Abhandlung. Homogene Flüssigkeiten. Allgemeine Existenzsätze", ath. Zeitschr. **1** (1918), S. 229–284; **3** (1919), S. 172–174; „Zweite Abhandlung. abilitätsfragen", Math. Zeitschr. **7** (1920), S. 126–231. Diese Arbeiten werden im lgenden kurz als Abh. I und Abh. II bezeichnet. Man vergleiche insbesondere apitel III § 6 der Abh. II.

Die Entwicklungen der vorstehenden Arbeiten gelten für beliebige, etwa von ächen mit stetiger Normale begrenzte Körper und beliebige Parameter ξ, η. In m besonderen Falle der ellipsoidischen Gleichgewichtsfiguren findet sich die Ent- icklung (16) bereits bei A. Liapounoff, wo sie auf einem anderen Wege abgeleitet ird. Vgl. A. Liapounoff, „Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes une masse liquide homogène, douée d'un mouvement de rotation. Première partie. tude générale du problème". Mémoire présenté à l'Académie impériale des sciences, . Pétersbourg 1906, S. 1–225, insb. S. 3–25. Liapounoff bedient sich bei seinen etrachtungen eines speziellen Systems krummliniger Koordinaten, das mit elliptischen oordinaten zusammenhängt.

[5]) Geht ζ in $\alpha\zeta$ über, so erhält $U^{(n)}$ den Faktor α^n.

$$U^{(n)} = \frac{1}{n!}\int_S \sum{}'(a'\zeta' - a\zeta)\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\left(\frac{A_t'}{\varrho_t}\right)\right]_{t=0} d\xi'\,d\eta' \qquad (n>1), \tag{17}$$

$$U^{(1)} = \psi\zeta + \int_S \frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma \quad {}^{5a}) \tag{17a}$$

In (17a) ist

$$\varkappa f\psi = -\frac{4}{3}\pi\tau\varkappa f \tag{18}$$

die Schwerkraft auf der Oberfläche der Kugel T; ϱ ist der Abstand der Punkte X, Y, Z und X', Y', Z' auf S,

$$\varrho^2 = (X'-X)^2 + (Y'-Y)^2 + (Z'-Z)^2 = \sum{}'(X'-X)^2; \tag{19}$$

ϱ_t ist der Abstand der Punkte P_t und P_t' auf S_t,

$$\varrho_t^2 = \varrho^2 + 2t\sum{}'(X'-X)(a'\zeta - a\zeta) + t^2\sum{}'(a'\zeta' - a\zeta); \tag{20}$$

schließlich ist

$$A_t = \frac{\partial(Y+bt\zeta,\ Z+ct\zeta)}{\partial(\xi,\eta)}, \qquad B_t = \frac{\partial(Z+ct\zeta,\ X+at\zeta)}{\partial(\xi,\eta)}, \qquad C_t = \frac{\partial(X+at\zeta,\ Y+bt\zeta)}{\partial(\xi,\eta)}. \tag{21}$$

Die Gleichung (12) nimmt nunmehr die Form an:

$$\varkappa f\left[\psi\zeta + \int_S \frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma' + U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots\right] + \mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_2 = \varkappa f s, \tag{22}$$

$$\mathsf{P}_1 = \frac{\omega^2}{2}[Y_1^2 + (l+X_1)^2] + \varkappa\dot{v}\dot{f}[(L+X_1)^2 + Y_1^2 + Z_1^2]^{-\frac{1}{2}}, \tag{23}$$

$$\mathsf{P}_2 = \varkappa\dot{f}\int_0^1 d\dot{t}\int_{S_i}\dot{\zeta}\cos\dot{\varphi}_t\,d\dot{\sigma}_i[(L+X_1+\dot{X}+\dot{a}\dot{t}\dot{\zeta})^2 + (Y_1+\dot{Y}+\dot{b}\dot{t}\dot{\zeta})^2 + (Z_1-\dot{Z}-\dot{c}\dot{t}\dot{\zeta})^2]^{-\frac{1}{2}}. \tag{24}$$

Wir entwickeln jetzt P_1 und P_2 nach Potenzen von $\frac{1}{L}$. Es gilt zunächst

$$\frac{\omega^2}{2}[Y_1^2 + (l+X_1)^2] = \frac{\omega^2}{2}(Y_1^2 + 2lX_1 + X_1^2 + l^2) \tag{25}$$

und

$$\varkappa\dot{v}\dot{f}[(L+X_1)^2 + Y_1^2 + Z_1^2]^{-\frac{1}{2}} = \varkappa\dot{v}\dot{f}\frac{1}{L}\left(1 - \frac{X_1}{L} - \frac{Y_1^2+Z_1^2-2X_1^2}{2L^2} + \ldots\right). \tag{26}$$

[5a]) In der Formel (17) besteht die zu integrierende Funktion aus drei Summanden: dem hinter dem Zeichen Σ stehenden Ausdruck und den beiden Ausdrücken, die man erhält, wenn man a, a', A_t' entsprechend durch b, b', B_t' und c, c', C_t' ersetzt.

Ferner ist

$$[(L+X_1+\dot{X}+\dot{a}\dot{t}\dot{\zeta})^2+(Y_1+\dot{Y}+\dot{b}\dot{t}\dot{\zeta})^2+(Z_1-\dot{Z}-\dot{c}\dot{t}\dot{\zeta})^2]^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{L}\left[1-\frac{X_1+\dot{X}+\dot{a}\dot{t}\dot{\zeta}}{L}-\frac{(Y_1+\dot{Y}+\dot{b}\dot{t}\dot{\zeta})^2+(Z_1-\dot{Z}-\dot{c}\dot{t}\dot{\zeta})^2-2(X_1+\dot{X}+\dot{a}\dot{t}\dot{\zeta})^2}{2L^2}+\cdots\right].$$

Sei

28) $$\dot{t}=\int_0^1 d\dot{t}\int_{\dot{s}_i}\dot{\zeta}\cos\dot{\varphi}_i\,d\dot{\sigma}_i$$

as Volumen des Körpers $\dot{T}_1-\dot{T}$. Es sei ferner

29) $$\dot{m}=\int_0^1 d\dot{t}\int_{\dot{s}_i}\dot{\zeta}\cos\dot{\varphi}_i\,(\dot{X}+\dot{a}\dot{t}\dot{\zeta})\,d\dot{\sigma}_i$$

as statische Moment von $\dot{T}_1-\dot{T}$ in bezug auf die Ebene $\dot{x}=0$.

Wir setzen, *unter w einen später zu bestimmenden Parameter verstanden,*

30) $$\omega^2 l=\varkappa\dot{f}(\dot{v}+\dot{t})\frac{1}{L^2}+w.$$

Die mit X_1 multiplizierten Glieder in (22) haben jetzt wegen (25), 26) und (27) den Wert

31) $$wX_1.$$

Die Entwicklung von $\dot{P}_1+\dot{P}_2$ ergibt die zu (30) analoge Beziehung

32) $$\omega^2\dot{l}=\varkappa f(v+t)\frac{1}{L^2}+\dot{w}.$$

Wir erhalten jetzt

$$P_1+P_2=\varkappa\dot{f}(\dot{v}+\dot{t})\frac{l}{2L^2}+\varkappa\dot{f}\dot{v}\frac{1}{L}+w\frac{l}{2}+wX_1+w\frac{X_1^2+Y_1^2}{2l}$$
$$+\varkappa\dot{f}\frac{\dot{v}+\dot{t}}{2L^2}\frac{X_1^2+Y_1^2}{l}+\varkappa\dot{f}\dot{v}\frac{1}{L}\left(-\frac{Y_1^2+Z_1^2-2X_1^2}{2L^2}+\cdots\right)$$
33) $$+\frac{\varkappa\dot{f}}{L}\dot{t}-\frac{\varkappa\dot{f}}{L^2}\dot{m}+\varkappa\dot{f}\int_0^1 d\dot{t}\int_{\dot{s}_i}\dot{\zeta}\cos\dot{\varphi}_i\,d\dot{\sigma}_i$$
$$\left\{-\frac{(Y_1+\dot{Y}+\dot{b}\dot{t}\dot{\zeta})^2+(Z_1-\dot{Z}-\dot{c}\dot{t}\dot{\zeta})^2-2(X_1+\dot{X}+\dot{a}\dot{t}\dot{\zeta})^2}{2L^2}+\cdots\right\}$$
$$\left(X_1=X\left(1+\frac{\zeta}{r}\right),\qquad Y_1=Y\left(1+\frac{\zeta}{r}\right),\qquad Z_1=Z\left(1+\frac{\zeta}{r}\right)\right).$$

Die nicht hingeschriebenen Glieder sind in bezug auf L^{-1} vom dritten oder höheren Grade.

Setzt man jetzt in (22)

34) $$\varkappa fs=\varkappa\dot{f}(\dot{v}+\dot{t})\frac{l}{2L^2}+\varkappa\dot{f}\dot{v}\frac{1}{L}+w\frac{l}{2}+\frac{\varkappa\dot{f}}{L}\dot{t}-\frac{\varkappa\dot{f}}{L^2}\dot{m},$$

so findet man nach einer leichten Umordnung

$$\zeta - \frac{3}{4\pi\mathfrak{r}}\int_S \frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma' = \frac{3}{4\pi\mathfrak{r}}\,(U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots) + \mathsf{P}, \tag{35}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{P} &= \frac{3}{4\pi\mathfrak{r}\varkappa f}\left(\mathsf{P}_1 + \mathsf{P}_2 - \varkappa f(\dot v + \dot{\mathfrak{t}})\frac{l}{2L^2} - \varkappa f\dot v\frac{1}{L} - w\frac{l}{2} - \frac{\varkappa f}{L}\dot{\mathfrak{t}} + \frac{\varkappa f}{L^2}\mathfrak{m}\right)\\ &= \frac{3}{4\pi\mathfrak{r}\varkappa f}\left[w X_1 + w\frac{X_1^2+Y_1^2}{2l} + \varkappa f\,\frac{\dot v+\dot{\mathfrak{t}}}{2L^2}\,\frac{X_1^2+Y_1^2}{l}\right.\\ &\quad + \varkappa f\dot v\frac{1}{L}\left(-\frac{Y_1^2+Z_1^2-2X_1^2}{2L^2}+\ldots\right) + \varkappa f\int_0^1 d\mathfrak{t}\int_{S_{\mathfrak{t}}}\dot\zeta\cos\dot\varphi_{\mathfrak{t}}\,d\dot\sigma_{\mathfrak{t}}\\ &\quad \left.\left\{-\frac{(Y_1+\dot Y+\dot b\,\dot{\mathfrak{t}}\dot\zeta)^2+(Z_1-\dot Z-\dot c\,\dot{\mathfrak{t}}\dot\zeta)^2-2(X_1+\dot X+\dot a\,\dot{\mathfrak{t}}\dot\zeta)^2}{2L^2}+\ldots\right\}\right].\end{aligned} \tag{36}$$

Zu der Gleichung (35) tritt eine weitere Gleichung hinzu, die man erhält, wenn man in (35) und (36) die punktierten Buchstaben durch die nichtpunktierten ersetzt und umgekehrt. Die beiden Gleichungen bilden ein System nichtlinearer Integro-Differentialgleichungen zur Bestimmung von ζ und $\dot\zeta$.

§ 3.

Auflösung der Integro-Differentialgleichungen des Problems.

Die Integralgleichung

$$-\frac{4\pi\mathfrak{r}}{3}\zeta + \int_S \frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma' = 0 \tag{37}$$

hat nach bekannten Sätzen drei linear unabhängige Eigenfunktionen. Es sind dies z. B. die drei allgemeinen Kugelfunktionen

$$\frac{Z}{\mathfrak{r}},\quad \frac{X}{\mathfrak{r}},\quad \frac{Y}{\mathfrak{r}}. \tag{38}$$

Wir bezeichnen diese Nullösungen, in der üblichen Weise normiert, mit u_1, u_3, u_4. Es gilt demnach

$$\int_S \psi u_1^2\,d\sigma = \int_S \psi u_3^2\,d\sigma = \int_S \psi u_4^2\,d\sigma = -1\ ^6). \tag{39}$$

Man findet leicht

$$u_1 = \frac{3}{4\pi}\frac{Z}{\mathfrak{r}^{\frac{5}{2}}},\quad u_3 = \frac{3}{4\pi}\frac{X}{\mathfrak{r}^{\frac{5}{2}}},\quad u_4 = \frac{3}{4\pi}\frac{Y}{\mathfrak{r}^{\frac{5}{2}}}.\ ^7) \tag{40}$$

---

6) Man beachte, daß $\psi < 0$ ist.

7) Die Bezeichnungen schließen sich an die in den Abhandlungen I und II gebrauchten an. Dort sind u_1 und u_2 die trivialen Nullösungen der Integralgleichung

(Fortsetzung der Fußnote 7 auf nächster Seite.)

Sei

41) $$N_1 = \frac{1}{\varrho} - \psi\psi'(u_1u_1' + u_3u_3' + u_4u_4') = \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\mathfrak{r}^3}(XX' + YY' + ZZ').$$

Die Integralgleichung

42) $$-\frac{4\pi}{3}\mathfrak{r}\zeta + \int_S N_1\zeta'\,d\sigma' = 0$$

at nach bekannten Sätzen keine Nullösungen mehr. Sei

43) $$r_1 = -\int_S \psi' u_1'\zeta'\,d\sigma', \quad r_3 = -\int_S \psi' u_3'\zeta'\,d\sigma', \quad r_4 = -\int_S \psi' u_4'\zeta'\,d\sigma'.$$

Wie ich an einer anderen Stelle bewiesen habe, hat jede Gleichgewichtsigur rotierender homogener Flüssigkeit eine auf der Rotationsachse senkecht stehende Symmetrieebene[8]). Wir denken uns die Körper T_1 und $\dot{T}_1$ o orientiert, daß ihre Symmetrieebene in die Ebene $z_0 = 0$ fällt[9]). Alslann ist

44) $$r_1 = -\int_S \psi' u_1'\zeta'\,d\sigma' = 0, \quad \dot{r}_1 = -\int_S \dot{\psi}'\dot{u}_1'\dot{\zeta}'\,d\dot{\sigma}' = 0.$$

Wir nehmen darüber hinaus an, daß die gesuchte Gleichgewichtsfigur uch noch in bezug auf die Ebene $y_0 = 0$ symmetrisch ist. Alsdann ist

45) $$r_4 = 0, \quad \dot{r}_4 = 0.$$

Wir bestimmen die noch verfügbaren Parameter $w, \dot{w}$ so, daß auch $r_3 = \dot{r}_3 = 0$ *wird.* Die Integro-Differentialgleichung (35) geht jetzt über in

46) $$\zeta - \frac{3}{4\pi\mathfrak{r}}\int_S N_1\zeta'\,d\sigma' = \frac{3}{4\pi\mathfrak{r}}(U^{(2)} + U^{(3)} + \ldots) + \mathsf{P}.$$

$\zeta + \int_S \frac{1}{\varrho}\zeta'\,d\sigma' = 0$. Bei Rotationskörpern ist $u_2 \equiv 0$ zu setzen. Es sei in diesem

Falle $\mathfrak{s}$ die längs einer Meridianlinie gemessene Entfernung des Punktes σ von einem Pole der Fläche, $\mathfrak{d}$ der Azimutwinkel. Die etwa noch vorhandenen nicht trivialen Nullösungen sind entweder von der Form $\mathfrak{F}(\mathfrak{s})$, oder sie treten paarweise auf und haben die Gestalt $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s})\cos k\mathfrak{d}$, $\mathfrak{F}_1(\mathfrak{s})\sin k\mathfrak{d}$. Im vorliegenden Falle ist

$$u_3 = \frac{3}{4\pi}\frac{\sin\mathfrak{s}\cos\mathfrak{d}}{\mathfrak{r}^{\frac{3}{2}}}, \qquad u_4 = \frac{3}{4\pi}\frac{\sin\mathfrak{s}\sin\mathfrak{d}}{\mathfrak{r}^{\frac{3}{2}}},$$

emnach $k = 1$.

[8]) Vgl. L. Lichtenstein, Über einige Eigenschaften der Gleichgewichtsfiguren otierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz nziehen, Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 48 (1918), . 1120—1124.

[9]) Das kann man nötigenfalls durch eine geeignete Verschiebung parallel zu der $_0$-Achse stets erreichen.

Es gilt ferner die hierzu analoge Integro-Differentialgleichung

$$\dot{\zeta} - \frac{3}{4\pi\dot{\mathfrak{r}}} \int_S \dot{N}_1 \zeta' \, d\dot{\sigma}' = \frac{3}{4\pi\dot{\mathfrak{r}}} (\dot{U}^{(2)} + \dot{U}^{(3)} + \ldots) + \dot{\mathsf{P}}. \tag{47}$$

Die Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichungen (46) und (47) sind Funktionen der Parameter $w, \dot{w}, w_1 = \frac{\mathfrak{r}}{L}, \dot{w}_1 = \frac{\dot{\mathfrak{r}}}{L}, w_2 = \frac{\mathfrak{r}}{l}, \dot{w}_2 = \frac{\dot{\mathfrak{r}}}{l}$, die sich für alle hinreichend kleinen Werte von $|w|, |\dot{w}|, |w_1|, |\dot{w}_1|, |w_2|, |\dot{w}_2|$ analytisch und regulär verhalten. Wie in meinen vorhin genannten Arbeiten zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, läßt sich zeigen, daß die Integro-Differentialgleichungen (46), (47) für jedes Wertsystem $w, \dot{w}, w_1, \dot{w}_1, w_2, \dot{w}_2$ in einem Gebiete

$$|w|, |\dot{w}|, |w_1|, |\dot{w}_1|, |w_2|, |\dot{w}_2| \leqq \varepsilon_1 \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon^* \tag{48}$$

eine und nur eine Lösung hat. Diese Lösung kann durch sukzessive Approximationen gewonnen und nach Potenzen von $w, \dot{w}, w_1, \dot{w}_1, w_2, \dot{w}_2$ entwickelt werden[10]). Sie ist in bezug auf die Ebenen $z_0 = 0$ und $y_0 = 0$ symmetrisch[11]). Es ist nicht schwer, die ersten Glieder der Entwicklungen für ζ und $\dot{\zeta}$ zu bestimmen[12]). Man findet

$$\zeta = \frac{3}{4\pi\mathfrak{r}\varkappa f}\left\{wX + \frac{5}{4}\frac{\varkappa \dot{f}\dot{v}}{L^2}\left(-\frac{Z^2}{l} + \frac{3X^2}{L}\right)\right. \tag{49}$$
$$\left. + \frac{\varkappa \dot{f}\dot{v}\mathfrak{r}^2}{4L^2}\left(\frac{1}{l} - \frac{5}{L}\right) + \mathfrak{P}(w, \dot{w}, w_1, \dot{w}_1, w_2, \dot{w}_2)\right\}$$

und

$$\dot{\zeta} = \frac{3}{4\pi\dot{\mathfrak{r}}\varkappa \dot{f}}\left\{\dot{w}\dot{X} + \frac{5}{4}\frac{\varkappa f v}{L^2}\left(-\frac{\dot{Z}^2}{\dot{l}} + \frac{3\dot{X}^2}{L}\right)\right. \tag{50}$$
$$\left. + \frac{\varkappa f v \dot{\mathfrak{r}}^2}{4L^2}\left(\frac{1}{\dot{l}} - \frac{5}{\dot{L}}\right) + \dot{\mathfrak{P}}(w, \dot{w}, w_1, \dot{w}_1, w_2, \dot{w}_2)\right\}.$$

In $\mathfrak{P}$ und $\dot{\mathfrak{P}}$ sind die von w und $\dot{w}$ freien Glieder von der Ordnung $\frac{1}{L^4}, \frac{1}{L^3 l}, \frac{1}{L^3 \dot{l}}$. Glieder von der Form $F(X, Y, Z; \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})w$ und $\dot{F}(X, Y, Z; \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z})\dot{w}$ fehlen ganz.

---

[10]) Vgl. Abh. II, S. 156–165; Abh. I, S. 277–278. Siehe ferner meine Arbeit: Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Erste Abhandlung. Die Laplacesche Theorie der Gestalt des Erdmondes, diese Zeitschrift **10** (1921), S. 130 bis 159 insbes. S. 138, Fußnote [11]).

[11]) Vgl. Abh. I, S. 260–261.

[12]) Vgl. die in der zweitletzten Fußnote an dritter Stelle genannte Abhandlung, S. 149–150. Man beachte, daß in P (Formel 36) für $\dot{\mathfrak{r}}$ der Ausdruck (28) einzusetzen ist.

Setzt man jetzt in die Beziehungen

51) $$\int_S \psi u_3 \zeta d\sigma = 0, \qquad \int_S \dot{\psi} \dot{u}_3 \dot{\zeta} d\dot{\sigma} = 0$$

ır ζ und $\dot{\zeta}$ die Ausdrücke (49) und (50) ein, so erhält man wegen

52) $$\frac{3}{4\pi\mathfrak{r}\varkappa f}\int_S \psi u_3 w X d\sigma = -\frac{3}{4\pi\mathfrak{r}\varkappa f}\frac{4\pi\mathfrak{r}}{3}\frac{3}{4\pi\mathfrak{r}^{\frac{5}{2}}}\int_S X^2 d\sigma = -\frac{\mathfrak{r}^{\frac{3}{2}}}{\varkappa f},$$

53) $$\int_S \psi u_3 d\sigma = \int_S \psi u_3 X^2 d\sigma = \int_S \psi u_3 Z^2 d\sigma = 0, \ldots$$

vei Gleichungen von der Form

54) $$-\frac{\mathfrak{r}^{\frac{3}{2}}}{\varkappa f} w + \mathfrak{p}(w, \dot{w}, w_1, \dot{w}_1, w_2, \dot{w}_2) = 0,$$

55) $$-\frac{\dot{\mathfrak{r}}^{\frac{3}{2}}}{\varkappa f} \dot{w} + \dot{\mathfrak{p}}(w, \dot{w}, w_1, \dot{w}_1, w_2, \dot{w}_2) = 0,$$

ıs denen sich

56) $$w = O\left(\frac{\tilde{\mathfrak{r}}^4}{L^4}\right), \qquad \dot{w} = O\left(\frac{\tilde{\mathfrak{r}}^4}{L^4}\right)$$

gibt[13]), unter $\tilde{\mathfrak{r}}$ die größere der beiden Zahlen $\mathfrak{r}$ und $\dot{\mathfrak{r}}$ verstanden. Aus 49) und (50) findet man zunächst

57) $$\zeta = \frac{3}{4\pi\mathfrak{r}f}\left\{\frac{5}{4}\frac{\dot{f}\dot{v}}{L^2}\left(-\frac{Z^2}{l} + \frac{3X^2}{L}\right) + \frac{\dot{f}\dot{v}\mathfrak{r}^2}{4L^2}\left(\frac{1}{l} - \frac{5}{L}\right)\right\} + O\left(\frac{\tilde{\mathfrak{r}}^4}{L^4}\right)$$

nd

58) $$\dot{\zeta} = \frac{3}{4\pi\dot{\mathfrak{r}}\dot{f}}\left\{\frac{5}{4}\frac{fv}{L^2}\left(-\frac{\dot{Z}^2}{\dot{l}} + \frac{3\dot{X}^2}{L}\right) + \frac{fv\dot{\mathfrak{r}}^2}{4L^2}\left(\frac{1}{\dot{l}} - \frac{5}{L}\right)\right\} + O\left(\frac{\tilde{\mathfrak{r}}^4}{L^4}\right).$$

Aus den Gleichungen (30) und (32) folgt nunmehr, wenn man be-ıcksichtigt, daß

59) $$\mathfrak{t} = O\left(\frac{\tilde{\mathfrak{r}}^3}{L^3}\right), \qquad \dot{\mathfrak{t}} = O\left(\frac{\tilde{\mathfrak{r}}^3}{L^3}\right)$$

t, nach einer leichten Umrechnung

60) $$\frac{\varkappa\dot{f}\dot{v}}{L^2 l} = \frac{\varkappa f v}{L^2 \dot{l}} + O\left(\frac{\tilde{\mathfrak{r}}^5}{L^5}\right),$$

mit

61) $$\frac{\dot{l}}{l} = \frac{fv}{\dot{f}\dot{v}} + O\left(\frac{\tilde{\mathfrak{r}}^2}{L^2}\right)$$

nd wegen

62) $$l + \dot{l} = L,$$

[13]) Man beachte, daß $\frac{l}{L} < 1$, $\frac{\dot{l}}{L} < 1$ ist.

wie man leicht findet,

$$(63)\qquad l = L\frac{\dot f \dot v}{fv + \dot f \dot v} + O\left(\frac{\tilde\tau}{L}\right), \qquad \dot l = L\frac{fv}{fv + \dot f \dot v} + O\left(\frac{\tilde\tau}{L}\right).$$

Ist insbesondere $vf = \dot v \dot f$, so ist

$$(64)\qquad l = \frac{1}{2}L + O\left(\frac{\tilde\tau}{L}\right), \qquad \dot l = \frac{1}{2}L + O\left(\frac{\tilde\tau}{L}\right), \text{ [14]}$$

$$(65)\qquad \zeta = \frac{3v}{16\pi\tau L^3}(12X^2 - 3Y^2 - 13Z^2) + O\left(\frac{\tilde\tau^4}{L^4}\right),$$

$$(66)\qquad \dot\zeta = \frac{3\dot v}{16\pi\tau L^3}(12\dot X^2 - 3\dot Y^2 - 13\dot Z^2) + O\left(\frac{\tilde\tau^4}{L^4}\right),$$

Ähnlich wie in der Abh. II auf S. 270—276, läßt es sich zeigen, daß man auf S_1 Systeme Gaußscher Parameter angeben kann derart, daß die Kartesischen Koordinaten der Punkte auf S_1 stetige Ableitungen aller Ordnungen in bezug auf diese Parameter haben.

Wie an einer anderen Stelle [15]), läßt sich leicht zeigen, daß *die Körper T_1 und $\dot T_1$ in einer ersten Näherung Ellipsoidkörper darstellen, deren* Halbachsen die Werte

$$(67)\quad \alpha = \tau\left(1 + 3\frac{\tau^3}{L^3}\right), \quad \beta = \tau\left(1 - \frac{3}{4}\frac{\tau^3}{L^3}\right), \quad \gamma = \tau\left(1 - \frac{13}{4}\frac{\tau^3}{L^3}\right); \quad \ldots$$

haben. Die große Achse ist nach der Umdrehungsachse hin, die kleine parallel zu dieser gerichtet. Es gilt

$$(68)\qquad \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} = 2{,}5\,.$$

Allgemein gelten, wenn man $\frac{vf}{\dot v \dot f} = \mu$ setzt, die Formeln

$$(69)\qquad l = L\frac{1}{1+\mu} + O\left(\frac{\tilde\tau}{L}\right), \qquad \dot l = L\frac{\mu}{1+\mu} + O\left(\frac{\tilde\tau}{L}\right),$$

$$(70)\qquad \zeta = \frac{\tau^2}{\mu L^3}\left\{\frac{5}{4}\left(3X^2 - Z^2(1+\mu)\right) + \frac{\tau^2}{4}(\mu - 4)\right\} + O\left(\frac{\tilde\tau^4}{L^4}\right),$$

$$(71)\qquad \dot\zeta = \frac{\tau^2\mu}{L^3}\left\{\frac{5}{4}\left(3\dot X^2 - \dot Z^2\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)\right) + \frac{\tau^2}{4}\left(\frac{1}{\mu} - 4\right)\right\} + O\left(\frac{\tilde\tau^4}{L^4}\right),$$

---

[14]) Ist $f = \dot f$, $v = \dot v$, so ist aus Gründen der Symmetrie $l = \dot l = \frac{1}{2}L$.

[15]) Vgl. die in der Fußnote [10]) an dritter Stelle genannte Arbeit, S. 143—144.

nd in naheliegender Bezeichnungsweise

$$72)\quad \begin{cases} \alpha = \mathfrak{r}\left(1+\frac{\mathfrak{r}^3}{4\mu L^3}(\mu+11)\right), \qquad \beta = \mathfrak{r}\left(1+\frac{\mathfrak{r}^3}{4\mu L^3}(\mu-4)\right), \\ \qquad\qquad \gamma = \mathfrak{r}\left(1-\frac{\mathfrak{r}^3}{4\mu L^3}(9+4\mu)\right), \\ \dot\alpha = \mathfrak{r}\left(1+\frac{\mathfrak{r}^3\mu}{4L^3}\left(\frac{1}{\mu}+11\right)\right), \qquad \dot\beta = \mathfrak{r}\left(1+\frac{\mathfrak{r}^3\mu}{4L^3}\left(\frac{1}{\mu}-4\right)\right), \\ \qquad\qquad \dot\gamma = \mathfrak{r}\left(1-\frac{\mathfrak{r}^3\mu}{4L^3}\left(9+\frac{4}{\mu}\right)\right), \end{cases}$$

$$73)\quad \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} = \frac{\mu+4}{\mu+1}, \qquad \frac{\dot\alpha-\dot\gamma}{\dot\beta-\dot\gamma} = \frac{1+4\mu}{1+\mu}.$$

In dem Grenzfall $\mu \to 0$, mithin $\mathfrak{r} \to 0$, wird $\dot\zeta = 0$, $\dot l = 0$. Der Körper $T_1 \equiv T$ wird eine Kugel um den Punkt $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Es ilt jetzt

$$74)\quad \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma} = 4\ ^{16}).$$

§ 4.

Stabilität der Gleichgewichtsfigur.

Wir beweisen jetzt, ähnlich wie bei der Behandlung der Figur des Erdmondes[17]), daß die Gleichgewichtsfigur, deren Existenz durch die vorstehenden Betrachtungen dargetan worden ist, *stabil* ist. Darunter ist olgendes zu verstehen.

Sei J_1 das Trägheitsmoment des Systems $T_1, \dot T_1$ in bezug auf die Rotationsachse[18]). Wir setzen

$$75)\quad \breve M_1 = \omega^2 J_1^2.$$

Es seien T_2 und $\dot T_2$ irgendwelche von Flächen mit stetiger Normale S_2 nd $\dot S_2$ begrenzte Körper in der Nachbarschaft erster Ordnung von S_1 nd $\dot S_1$, die wir uns mit homogener Flüssigkeit entsprechend der Dichte und $\dot f$ erfüllt denken. *Die Volumina der Körper T_2 und T_1; $\dot T_2$ und $\dot T_1$ seien einander gleich; die Schwerpunkte der Körper T_2 und $\dot T_2$ decken ich entsprechend mit denjenigen der Körper T_1 und $\dot T_1$.* Wir bezeichnen

[16]) Derselbe Wert ergab sich in der loc. cit. [15]) genannten Arbeit für eine um in festes Attraktionszentrum rotierende, weit entfernte Flüssigkeitsmasse.

[17]) Vgl. loc. cit. [15]) S. 144—148.

[18]) Es ist $J_1 = \int\limits_{T_1+\dot T_1} \tilde f (x_0^2+y_0^2)\, dx_0\, dy_0\, dz_0$ $(\tilde f = f$ in T_1; $\tilde f = \dot f$ in $\dot T_1)$.

das Trägheitsmoment des Systems T_2, $\dot{T}_2$ mit J_2, die Entfernung der Massenelemente dm und $d\overline{m}$ in $T_2 + \dot{T}_2$ mit D und setzen

$$\Lambda_2^* = \frac{\breve{M}}{J_2} - \varkappa \iint\limits_{T_2+\dot{T}_2} \frac{dm\, d\overline{m}}{D}. \tag{76}$$

Die Gleichgewichtsfigur $T_1, \dot{T}_1$ soll mit Thomson und Tait, Poincaré und Liapounoff stabil heißen, wenn Λ_2^* für $T_2 = T_1$, $\dot{T}_2 = \dot{T}_1$ den kleinsten Wert Λ_1^* annimmt[19]).

Sei (ξ_1, η_1) irgendein System Gaußscher Koordinaten auf $S_1, \dot{S}_1$; (ν_1) die Normale in $(\xi_1, \eta_1) = \sigma_1$, positiv nach außen gerichtet, ζ_1 der Abstand des Schnittpunktes von (ν_1) mit $S_2(\dot{S}_2)$ von $S_1(\dot{S}_1)$. Die Lage der Punkte auf $S_2(\dot{S}_2)$ ist durch die krummlinigen Koordinaten ξ_1, η_1, ζ_1 bestimmt.

Wir bezeichnen mit $\varkappa \tilde{f} \psi_1$ die Schwerkraft auf S_1 und $\dot{S}_1$, mit R_1 den Abstand des Punktes σ_1 von der Rotationsachse, ϱ_1 den Abstand der Punkte σ_1 und σ_1' auf S_1 oder $\dot{S}_1$. Wir nehmen an, daß

$$N_1 = \operatorname{Max}\left(|\zeta_1|, \left|\frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi_1}\right|, \left|\frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta_1}\right|\right) < \varepsilon_2 \leqq \varepsilon_1 \tag{77}$$

gilt, unter ε_2 eine hinreichend kleine positive Zahl verstanden.

Durch Betrachtungen, die denjenigen der Abh. II S. 182—191 parallel laufen, läßt sich nun zeigen, daß

$$\begin{aligned} \Lambda_2^* - \Lambda_1^* = &- \varkappa \int\limits_{S_1+\dot{S}_1} \tilde{f}^2 \psi_1 \zeta_1^2 d\sigma_1 - \varkappa \iint\limits_{S_1+\dot{S}_1} \frac{1}{\varrho_1} \tilde{f} \tilde{f}' \zeta_1 \zeta_1' d\sigma_1 d\sigma_1' \\ &+ \frac{\omega^2}{J_1} \left(\int\limits_{S_1+\dot{S}_1} \tilde{f} R_1^2 \zeta_1 d\sigma_1 \right)^2 + |\Re^*|, \\ &|\Re^*| < \beta_1 \varepsilon_2 \int\limits_{S_1+\dot{S}_1} \zeta_1^2 d\sigma_1 \end{aligned} \tag{78}$$

ist, unter β_1 eine positive Konstante verstanden, wie später auch unter $\beta_2, \beta_3, \ldots$[20]). Wir beweisen, daß $\Lambda_2^* - \Lambda_1^* \geqq 0$ gilt, wie auch $T_2 + \dot{T}_2$ beschaffen sei, wenn nur die eingangs genannten Bedingungen erfüllt sind. Das Gleichheitszeichen gilt nur für $T_2 = T_1$, $\dot{T}_2 = \dot{T}_1$.

---

[19]) Vgl. die Abh. II S. 182—218, insbes. S. 182—184, sowie loc. cit. [15]) S. 144—148. An beiden Stellen handelt es sich um Systeme, gebildet von einer einzigen homogenen Flüssigkeit. Unter Trägheitsmoment J_1 wird darum dort der Ausdruck $\int\limits_{T_1+\dot{T}_1} (x_0^2 + y_0^2)\, dx_0\, dy_0\, dz_0$ verstanden. Auch sonst sind die Bezeichnungen jetzt stellenweise etwas anders geworden.

[20]) Vgl. die Bemerkungen in der Fußnote [19]).

Betrachten wir die lineare Integralgleichung

$$\psi_1 \zeta_1 + \mu \int_{S_1+\dot{S}_1} \frac{1}{\varrho_1} \zeta_1' \, d\sigma_1' = 0 . \tag{79}$$

Wie in der Abh. II S. 151—153 gezeigt worden ist, ist der Kern $\frac{1}{\varrho_1}$ positiv definit und abgeschlossen. Die Eigenwerte von (79) sind sämtlich positiv. Wir bezeichnen sie, in der üblichen Weise einfach geordnet, mit $\mu_1^{(1)}, \mu_1^{(2)}, \ldots$. Die zugehörigen normierten Eigenfunktionen heißen $u_1^{(1)}, u_1^{(2)}, \ldots$. Es gilt

$$\iint_{S_1+\dot{S}_1} \frac{1}{\varrho_1} \tilde{f}\tilde{f}' \zeta_1 \zeta_1' \, d\sigma_1 \, d\sigma_1' = \sum \frac{1}{\mu_1^{(n)}} \Big(\int_{S_1+\dot{S}_1} \psi_1 \tilde{f} \zeta_1 u_1^{(n)} \, d\sigma_1 \Big)^2 \tag{80}$$

und

$$\int_{S_1+\dot{S}_1} \psi_1 \tilde{f}^2 \zeta_1^2 \, d\sigma_1 = - \sum \Big(\int_{S_1+\dot{S}_1} \psi_1 \tilde{f} \zeta_1 u_1^{(n)} \, d\sigma_1 \Big)^2 . \tag{81}$$

Wegen

$$\omega^2 = O\Big(\frac{\tilde{\mathfrak{r}}^3}{L^3}\Big), \qquad R_1^2 = O(L^2), \qquad J_1 = O(L^2)^{21}) \tag{82}$$

ist

$$\frac{\omega^2}{J_1} \Big(\int_{S_1+\dot{S}_1} \tilde{f} R_1^2 \zeta_1 \, d\sigma_1 \Big)^2 < \beta_2 \frac{\tilde{\mathfrak{r}}}{L} \Big| \int_{S_1+\dot{S}_1} \psi_1 \zeta_1^2 \, d\sigma_1 \Big| . \tag{83}$$

Wir nehmen $\frac{\tilde{\mathfrak{r}}}{L} < \varepsilon_2$ an und erhalten aus (78), (80) und (81), wenn wir aus Gründen, die alsbald ersichtlich werden, die acht ersten Eigenwerte zusammenfassen,

$$\begin{aligned} \Lambda_2^* - \Lambda_1^* = {} & \varkappa \sum_{n=1}^{8} \Big(1 - \frac{1}{\mu_1^{(n)}}\Big) \Big(\int_{S_1+\dot{S}_1} \psi_1 \tilde{f} \zeta_1 u_1^{(n)} \, d\sigma_1 \Big)^2 \\ & + \varkappa \sum_{n>8} \Big(1 - \frac{1}{\mu_1^{(n)}}\Big) \Big(\int_{S_1+\dot{S}_1} \psi_1 \tilde{f} \zeta_1 u_1^{(n)} \, d\sigma_1 \Big)^2 + \mathfrak{R}_1^* , \\ & |\mathfrak{R}_1^*| < \beta_3 \varepsilon_2 \Big| \int_{S_1+\dot{S}_1} \psi_1 \zeta_1^2 \, d\sigma_1 \Big| . \end{aligned} \tag{84}$$

Neben der Integralgleichung (79) betrachten wir die beiden Integralgleichungen

$$-\frac{4\pi \mathfrak{r}}{3} \zeta + \mu \int_S \frac{1}{\varrho} \zeta' \, d\sigma' = 0 \quad \text{und} \quad -\frac{4\pi \dot{\mathfrak{r}}}{3} \zeta + \mu \int_S \frac{1}{\varrho} \zeta' \, d\sigma' = 0^{22}) . \tag{85}$$

---

21) Man vergleiche die Formeln (30), (56) und (59).

22) Die Schwerkraft auf der ruhenden, isoliert gedachten Kugel S hat den Wert $-\frac{4\pi \mathfrak{r}}{3} \varkappa f$.

Ihre Eigenwerte, zusammengeworfen und in der üblichen Weise einfach geordnet, heißen $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \ldots$, die zugehörigen normierten Eigenfunktionen (die allgemeinen Kugelfunktionen auf S bzw. $\dot{S}$) $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots$. Wie sich ohne wesentliche Schwierigkeiten zeigen läßt, konvergieren $\mu_1^{(1)}, \mu_1^{(2)}, \ldots$ für $S_1 \to S$, $\dot{S}_1 \to \dot{S}$ entsprechend gegen $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \ldots$[23]). Wir fassen $\zeta_1, u_1^{(1)}, u_1^{(2)} \ldots$ als Ortsfunktionen auf $S + \dot{S}$ auf und bezeichnen sie als solche mit $\tilde{\zeta}, \bar{u}^{(1)}(\sigma), \bar{u}^{(2)}(\sigma), \ldots$[24]).

Es gilt nun, wie sich zeigen läßt (vgl. die Abh. II S. 140—147 und S. 205—214, wo sich ähnliche Betrachtungen finden),

$$\psi_1 = \begin{cases} -\frac{4\pi\tau}{3} + O\left(\frac{\tilde{\tau}}{L}\right) \text{ auf } S_1, \\ -\frac{4\pi\dot{\tau}}{3} + O\left(\frac{\tilde{\tau}}{L}\right) \text{ auf } \dot{S}_1, \end{cases} \qquad \frac{d\sigma_1}{d\sigma} = 1 + O\left(\frac{\tilde{\tau}}{L}\right),$$

$$(86) \qquad \bar{u}^{(3)}(\sigma) = \begin{cases} u^{(3)}(\sigma) + O\left(\frac{\tilde{\tau}}{L}\right) = \beta_4 \frac{X}{\tau} + O\left(\frac{\tilde{\tau}}{L}\right) \text{ auf } S, \\ O\left(\frac{\tilde{\tau}}{L}\right) \text{ auf } \dot{S}, \end{cases}$$

$$\mu_1^{(3)} = 1 + O\left(\frac{\tilde{\tau}}{L}\right),$$

darum, wie man leicht sieht,

$$(87) \qquad \left|1 - \frac{1}{\mu_1^{(3)}}\right| \left(\int_{S_1+\dot{S}_1} \psi_1 \tilde{f} \zeta_1 u_1^{(3)} d\sigma_1\right)^2 < \beta_5 \frac{\tilde{\tau}}{L} \left| \int_{S_1+\dot{S}_1} \psi_1 \zeta_1^2 d\sigma_1 \right|.^{24a})$$

Analoge Ungleichheiten gelten für die mit $u_1^{(4)}, \ldots, u_1^{(8)}$ behafteten Glieder. Für $\frac{X}{\tau}$ treten hier $\frac{Y}{\tau}, \ldots, \frac{\dot{Z}}{\dot{\tau}}$ ein.

Ferner ist

$$\mu_1^{(1)} = \mu^{(1)} + O\left(\frac{\tilde{\tau}}{L}\right) = \frac{1}{3} + O\left(\frac{\tilde{\tau}}{L}\right),$$

$$(88) \qquad \bar{u}^{(1)}(\sigma) = \begin{cases} u^{(1)}(\sigma) + O\left(\frac{\tilde{\tau}}{L}\right) = D_1 + O\left(\frac{\tilde{\tau}}{L}\right) \text{ auf } S \\ O\left(\frac{\tilde{\tau}}{L}\right) \text{ auf } \dot{S}, \end{cases} \qquad (D_1 \text{ konstant}),$$

---

[23]) Es gelten demnach insbesondere die Formeln

$$\mu_1^{(1)} \to \tfrac{1}{3}, \quad \mu_1^{(2)} \to \tfrac{1}{3}, \quad \mu_1^{(3)} \to 1, \quad \ldots, \quad \mu_1^{(8)} \to 1.$$

[24]) Die zusammengehörigen Punkte σ und σ_1 liegen allemal auf demselben Halbmesser der Kugel S oder $\dot{S}$.

[24a]) In den Formeln (86) treten hinter dem Zeichen O eigentlich sogar höhere Potenzen von $\frac{\tilde{\tau}}{L}$ auf. So ist z. B. $\frac{d\sigma_1}{d\sigma} = 1 + O\left(\frac{\tilde{\tau}^3}{L^3}\right)$. Für die weiteren Betrachtungen genügen die Abschätzungen des Textes.

ithin

89) $$\left(1-\frac{1}{\mu_1^{(1)}}\right)\left(\int\limits_{S_1+\dot{S}_1}\psi_1\tilde{f}\zeta_1 u_1^{(1)}d\sigma_1\right)^2$$

$$=\left[-2+O\left(\frac{\tilde{\tau}}{L}\right)\right]\left[\int\limits_{S_1}\zeta_1\left(D_2+O\left(\frac{\tilde{\tau}}{L}\right)\right)d\sigma_1+\int\limits_{\dot{S}_1}\zeta_1 O\left(\frac{\tilde{\tau}}{L}\right)d\sigma_1\right]^2.$$

(D_2 konstant).

Nach Voraussetzung ist das Volumen des Körpes T_2 gleich demenigen von T_1. Darum ist, wie sich leicht zeigen läßt[25]),

90) $$\left|\int\limits_{S_1}\zeta_1 d\sigma_1\right|<\beta_6\varepsilon_2\int\limits_{S_1}|\zeta_1|d\sigma_1,$$

ithin wegen $\frac{\tilde{\tau}}{L}<\varepsilon_2$ gewiß

91) $$\left|1-\frac{1}{\mu_1^{(1)}}\right|\left(\int\limits_{S_1+\dot{S}_1}\psi_1\tilde{f}\zeta_1 u_1^{(1)}d\sigma_1\right)^2<\beta_7\varepsilon_2\left|\int\limits_{S_1+\dot{S}_1}\psi_1\zeta_1^2 d\sigma_1\right|.$$

Eine analoge Ungleichheit gilt für die Eigenfunktion $u_1^{(2)}$. Wir finden etzt alles in allem

92) $$\Lambda_2^*-\Lambda_1^*=\varkappa\sum_{n>8}\left(1-\frac{1}{\mu_1^{(n)}}\right)\left(\int\limits_{S_1+\dot{S}_1}\psi_1\tilde{f}\zeta_1 u_1^{(n)}d\sigma_1\right)^2+\mathfrak{R}_2^*,$$

$$|\mathfrak{R}_2^*|<\beta_8\varepsilon_2\left|\int\limits_{S_1+\dot{S}_1}\psi_1\zeta_1^2 d\sigma_1\right|.$$

Wegen (81) ist

93) $$\int\limits_{S_1+\dot{S}_1}\psi_1\tilde{f}^2\zeta_1^2 d\sigma_1=-\sum_{n=1}^{8}\left(\int\limits_{S_1+\dot{S}_1}\psi_1\tilde{f}\zeta_1 u_1^{(n)}d\sigma_1\right)^2-\sum_{n>8}\left(\int\limits_{S_1+\dot{S}_1}\psi_1\tilde{f}\zeta_1 u_1^{(n)}d\sigma_1\right)^2.$$

Ferner ist

94) $$\int\limits_{S_1+\dot{S}_1}\psi_1\tilde{f}\zeta_1 u_1^{(3)}d\sigma_1=D_3\int\limits_{S}X\bar{\xi}\,d\sigma+\int\limits_{S_1+\dot{S}_1}O\left(\frac{\tilde{\tau}}{L}\right)\zeta_1 d\sigma_1\quad(D_3\text{ konstant}),$$

arum, wie sich leicht zeigen läßt,

95) $$\left(\int\limits_{S_1+\dot{S}_1}\psi_1\tilde{f}\zeta_1 u_1^{(3)}d\sigma_1\right)^2\leqq D_3^2\left(\int\limits_{S}X\bar{\xi}\,d\sigma\right)^2+\beta_9\varepsilon_2\left|\int\limits_{S_1+\dot{S}_1}\psi_1\zeta_1^2 d\sigma_1\right|.$$

Der Schwerpunkt der Flüssigkeitsmasse T_2 deckt sich mit demjenigen on T_1. Das Volumen von T_2 ist gleich dem Volumen von T_1. Das tatische Moment des Körpers T_2-T_1 in bezug auf die Ebenen $x=0$, $=0$, $z=0$ ist darum gleich Null. Dies besagt, wie sich zeigen läßt, aß

96) $$\left|\int\limits_{S_1}X_1\zeta_1 d\sigma_1\right|\leqq\beta_{10}\varepsilon_2\int\limits_{S_1}|\zeta_1|d\sigma_1$$

[25]) Vgl. Abh. II S. 186—187, wo sich Formeln für das Volumen T_2-T_1 finden.

gilt[26]). Hieraus folgt, wie man leicht sieht,

$$(97) \qquad \left|\int_S X\xi\, d\sigma\right| \leqq \beta_{11}\varepsilon_2 \int_{S_1+\dot{S}_1} |\zeta_1|\, d\sigma_1,$$

darum gewiß

$$(98) \qquad \left(\int_S X\xi\, d\sigma\right)^2 \leqq \beta_{12}\varepsilon_2 \left|\int_{S_1+\dot{S}_1} \psi_1 \zeta_1^2\, d\sigma_1\right|.$$

Analoge Beziehungen gelten für $\left(\int_S Y\xi\, d\sigma\right)^2, \ldots, \left(\int_S \dot{Z}\xi\, d\sigma\right)^2$. Aus (93) ergibt sich jetzt, wenn man die Ungleichheit (90) und die analoge Beziehung für $\left|\int_{\dot{S}_1} \dot{\zeta}_1\, d\sigma_1\right|$ berücksichtigt,

$$(99) \qquad \left|\int_{S_1+\dot{S}_1} \psi_1 \tilde{f}^2 \zeta_1^2\, d\sigma_1\right| \leqq \sum_{n>8} \left(\int_{S_1+\dot{S}_1} \psi_1 \tilde{f} \zeta_1 u_1^{(n)}\, d\sigma_1\right)^2 + \beta_{13}\varepsilon_2 \left|\int_{S_1+\dot{S}_1} \psi_1 \tilde{f}^2 \zeta_1^2\, d\sigma_1\right|,$$

mithin

$$(100) \qquad \sum_{n>8} \left(\int_{S_1+\dot{S}_1} \psi_1 \tilde{f} \zeta_1 u_1^{(n)}\, d\sigma_1\right)^2$$

$$\geqq (1-\beta_{13}\varepsilon_2) \left|\int_{S_1+\dot{S}_1} \psi_1 \tilde{f}^2 \zeta_1^2\, d\sigma_1\right| \geqq \beta_{14}(1-\beta_{13}\varepsilon_2) \left|\int_{S_1+\dot{S}_1} \psi_1 \zeta_1^2\, d\sigma_1\right|$$

und endlich wegen (92)

$$(101) \qquad \Lambda_2^* - \Lambda_1^* \geqq \left[\varkappa\beta_{14}\left(1-\frac{1}{\mu_1^{(9)}}\right)(1-\beta_{13}\varepsilon_2) - \beta_8\varepsilon_2\right] \left|\int_{S_1+\dot{S}_1} \psi_1 \zeta_1^2\, d\sigma_1\right|.$$

Wie wählen ε_2 so klein, daß

$$(102) \qquad \beta_{14}\left(1-\frac{1}{\mu_1^{(9)}}\right)(1-\beta_{13}\varepsilon_2) - \beta_8\varepsilon_2 > 0$$

ausfällt. Offenbar ist

$$(103) \qquad \Lambda_2^* - \Lambda_1^* \geqq 0.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $\int_{S_1+\dot{S}_1} \psi_1 \zeta_1^2\, d\sigma_1 = 0$, d. h. $\zeta_1 \equiv 0$.

Berlin, den 23. September 1921.

---

[26]) Vgl. Abh. II S. 196–199, wo sich ähnliche Betrachtungen finden.

(Eingegangen am 23. September 1921.)

Zum Waringschen Problem.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Waring sprach 1770 die Vermutung aus:

Satz I: *Zu jedem ganzen $k \geqq 1$ gibt es ein ganzes $s = s(k)$ derart, daß für jedes ganze $n \geqq 0$ die diophantische Gleichung*

$$n = \sum_{\nu=1}^{s} h_\nu^k, \qquad h_\nu \geqq 0 \tag{1}$$

lösbar ist.

Dies ist für $k = 1$ trivial ($s = 1$), für $k = 2$ zuerst von Lagrange ($s = 4$), für endlich viele weitere k vor Herrn Hilbert, für alle k nach 39 Jahren zuerst von Herrn Hilbert bewiesen.

In der Folge seien dauernd k, s, n ganz,

$$k \geqq 3, \quad a = \frac{1}{k}, \quad K = 2^{k-1}, \quad s \geqq 1, \quad n \geqq 0.$$

Auf ganz neuem Wege haben kürzlich[1]) die Herren Hardy und Littlewood den Hilbertschen Satz I nachgewiesen und viel mehr, insbesondere den[2])

---

[1]) *Some problems of 'Partitio Numerorum'*; I: *A new solution of Waring's Problem* [Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1920, S. 33–54].

[2]) Ich bemerke ausdrücklich, daß ich (mit Rücksicht auf § 2) hier von der Hardy-Littlewoodschen Bezeichnung abweiche. Diese nennen $r_s(n)$, und ich will in dieser Fußnote und der Fußnote [4]) $2^s r_s(n)$ nennen: den Koeffizienten von x^n in $(-1+2\sum_{h=0}^{\infty} x^{h^k})^s = (-1+2f)^s$. Also ist $2^s r_s(n)$ für gerades k die Lösungszahl von $n = \sum_{\nu=1}^{s} h_\nu^k$, $h_\nu \gtrless 0$; $r_s(n)$ ist für gerades und ungerades k der Koeffizient von x^n in $\left(\sum_{h=0}^{\infty} x^{h^k}\right) = f^s$. Satz II ist mit dem bei den Herren Hardy und

Satz II: *Es gibt zu jedem $\delta > 0$ ein $s_1(k, \delta)$ derart, daß für jedes $s \geqq s_1$ die Lösungszahl $r(n) = r_s(n) = r_{k,s}(n)$ von (1) den Relationen*

$$(2)\quad (1-\delta)\frac{(\Gamma(1+a))^s}{\Gamma(sa)} \leqq \liminf_{n=\infty} \frac{r_s(n)}{n^{sa-1}} \leqq \limsup_{n=\infty} \frac{r_s(n)}{n^{sa-1}} \leqq (1+\delta)\frac{(\Gamma(1+a))^s}{\Gamma(sa)}$$

genügt.

Satz II enthält natürlich Satz I; denn die erste der Relationen (2) mit $\delta = \frac{1}{2}$ lehrt, daß bei passendem $s_2(k)$

$$\liminf_{n=\infty} r_{s_2}(n) > 0$$

ist, also für $n \geqq n_1(k)$

$$r_{s_2}(n) > 0,$$

also für $n \geqq 0$

$$r_{s_2+n_1}(n) > 0.$$

Die folgende Arbeit ist für einen Leser geschrieben, der die Literatur nicht zu kennen braucht.

Im § 1 beweise ich unter Benutzung eines neueren Weylschen[3]) Gedankens und anderer Abkürzungen des Hardy-Littlewoodschen Weges den Satz II möglichst einfach. Hierbei ist die letzte Station vor dem Ziel der Hardy-Littlewoodsche[4])

Satz III: *Es werde für jede Einheitswurzel ϱ, wenn q ihr Grad*[5]) *ist,*

$$(3)\qquad S_\varrho = \sum_{h=1}^{q} \varrho^{h^k}$$

gesetzt.

Littlewood bewiesenen Satz II′, in dem r durch $\mathfrak{r}$ ersetzt ist, äquivalent. Denn $f^s - \left(f-\frac{1}{2}\right)^s = \frac{1}{2}\sum_{\lambda=0}^{s-1} f^{s-1-\lambda}\left(f-\frac{1}{2}\right)^\lambda$ hat die Majorante $\frac{1}{2}sf^{s-1}$, f^{s-1} die Majorante $\left(2\left(f-\frac{1}{2}\right)\right)^{s-1}$; daher ist für $s \geqq 2$

$$r_s(n) - \frac{s}{2} r_{s-1}(n) \leqq \mathfrak{r}_s(n) \leqq r_s(n) \leqq \mathfrak{r}_s(n) + \frac{s}{2} r_{s-1}(n) < \mathfrak{r}_s(n) + 2^{s-2} s \mathfrak{r}_{s-1}(n).$$

Aus jedem der beiden Sätze II und II′ mit $s \geqq s_1$ folgt also unmittelbar der andere mit $s \geqq s_1 + 1$, da ja in II bzw. II′ speziell enthalten ist:

$$r_{s-1}(n) \text{ bzw. } \mathfrak{r}_{s-1}(n) = O\left(n^{(s-1)a-1}\right) = o\left(n^{sa-1}\right).$$

[3]) *Bemerkung über die Hardy-Littlewoodschen Untersuchungen zum Waringschen Problem* [Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1921, S. 189–192].

[4]) Auch zu Satz III ist zu bemerken, daß er bei den Herren Hardy und Littlewood für $\mathfrak{r}_s(n)$ an Stelle von $r_s(n)$ erscheint (Satz III′), daß aber jeder der beiden Sätze III und III′ mit $s \geqq s_4 + 1$ aus dem anderen mit $s \geqq s_4$ folgt; wegen der in Anmerkung [2]) festgestellten Ungleichungen für r und $\mathfrak{r}$, und weil $\mathfrak{S}$ nach 1) für $s > 2K$ in Bezug auf n beschränkt ist.

[5]) D. h. ϱ sei primitive q-te Einheitswurzel.

1) *Dann ist die (von k, s, n abhängige) über alle ϱ erstreckte Reihe*

$$\mathfrak{S} = \sum_{\varrho} \left(\frac{S_\varrho}{q}\right)^s \varrho^{-n}$$

r $s > 2K$ und jedes n absolut konvergent.

2) *Ferner ist bei jedem $\delta > 0$ für $s \geqq s_3(k, \delta) > 2K$ und alle n*

$$1 - \delta < \mathfrak{S} < 1 + \delta.$$

3) *Endlich gibt es ein positives $\eta_1(k)$ mit folgender Eigenschaft. ür jedes $s \geqq s_4(k) > 2K$ ist bei passendem $C_1(k, s)$ und jedem $n \geqq 2$*

$$|r_s(n) - \frac{(\Gamma(1+a))^s}{\Gamma(sa)} n^{sa-1} \mathfrak{S}| < C_1 n^{sa-1-\eta_1}.$$

III setzt II in Evidenz.

Die Herren Hardy und Littlewood hatten (5) zunächst mit $= kK + 1$, aber in einer weiteren Abhandlung[6]) sogar mit $= (k-2)K + 5$ bewiesen[7]). Dies war trotz meiner schon publizierten ereinfachung[8]) bisher nur durch langwierige Schlüsse zu erreichen. Es ird mir in § 2 gelingen, das Ziel (5) auch mit $s_4 = (k-2)K + 5$ auf esentlich abgekürztem Wege zu erreichen.

Da es kaum mehr Mühe macht, werde ich den Entwicklungen des 2 alsbald die Annahme zugrunde legen, daß statt z^k irgendein ganz-hliges Polynom

$$P(z) = \alpha_0 z^k + \ldots + \alpha_k$$

it $\alpha_0 > 0$ gegeben ist, das für $z \geqq 0$ beständig wächst und $\geqq 0$ ist; $(n) = r_s(n) = r_{P,s}(n)$ bezeichnet jetzt die Lösungszahl von

$$n = \sum_{\nu=1}^{s} P(h_\nu), \quad h_\nu \geqq 0.$$

atürlich kann dann nicht von der Darstellung aller großen n die Rede

---

[6]) *Some problems of „Partitio Numerorum“: II. Proof that every large number the sum of at most* 21 *biquadrates* [Mathematische Zeitschrift, 9 (1921), S. 14–27].

[7]) Nach dem in Anmerkung [4]) Gesagten könnte es scheinen, als ob die Herren ardy und Littlewood (5) für $r_s(n)$ nur mit $s_4 = kK + 2$ bzw. $s_4 = (k-2)K + 6$ wiesen hätten. Jedoch gelten ihre beiden Hilfssätze über $-1 + 2\sum_{h=0}^{\infty} x^{h^k}$ unmittelr für $2\sum_{h=0}^{\infty} x^{h^k}$, da -1 gegen das Fehlerglied zu vernachlässigen ist; so daß ihnen lbstverständlich der Wortlaut des Textes zuzuschreiben ist.

[8]) *Zur Hardy-Littlewoodschen Lösung des Waringschen Problems* [Nachhten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathetisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1921, S. 88–92].

sein, da der größte gemeinsame Teiler aller $P(h_\nu)$, $h_\nu \geqq 0$, nicht 1 zu sein braucht[9]). Ich beweise demgemäß den

Satz IV: *Es werde für jede Einheitswurzel*

$$S_\varrho = \sum_{h=1}^{q} \varrho^{P(h)} \tag{7}$$

gesetzt.

1) *Dann ist die Reihe*

$$\mathfrak{S} = \sum_{\varrho} \left(\frac{S_\varrho}{q}\right)^s \varrho^{-n} \tag{4}$$

für $s > 2K$ und jedes n absolut konvergent.

2) *Ferner ist für $s \geqq s_5(k, \alpha_0, \delta) > 2K$, $k!\,\alpha_0 \mid s$, $k!\,\alpha_0 \mid n$*

$$M - \delta < \mathfrak{S} < M + \delta,$$

wo M eine durch P bestimmte positive ganze Zahl ist.

3) *Endlich gibt es ein positives $\eta_2(k)$ mit folgender Eigenschaft. Für jedes $s \geqq s_4 = kK + 1$ stets, im Falle der Richtigkeit*[10]) *von $r_s(n) = O(n^\varepsilon)$ (bei jedem $\varepsilon > 0$ und unserem P) sogar für jedes $s \geqq s_4 = (k-2)K + 5$, ist, wenn $E_1(P, s)$ passend gewählt wird und $n \geqq 2$ ist,*

$$|r_s(n) - \frac{(\Gamma(1+a))^s}{\alpha_0^{as}\,\Gamma(sa)}\, n^{sa-1}\,\mathfrak{S}| < E_1 n^{sa-1-\eta_2}. \tag{8}$$

Satz IV setzt ($\delta = \frac{1}{2}$ genommen) in Evidenz den

---

[9]) Auch dann nicht, wenn $(\alpha_0, \ldots, \alpha_k) = 1$ ist. Bekanntlich ist jedoch der größte gemeinsame Teiler aller $P(h)$, $h \geqq 0$, ein Teiler von $k!\,(\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$. Denn ist $\beta_0 z^k + \ldots + \beta_k$ für $z = 0, 1, \ldots, k$ eine ganze Zahl, so folgt aus der Entwicklung

$$\beta_0 z^k + \ldots + \beta_k = \gamma_0 \binom{z}{k} + \gamma_1 \binom{z}{k-1} + \ldots + \gamma_{k-1} \binom{z}{1} + \gamma_k$$

für $z = 0$, daß γ_k ganz ist; für $z = 1$, daß γ_{k-1} ganz ist, ..., schließlich für $z = k$, daß γ_0 ganz ist. Der Hauptnenner der β geht also in $k!$ auf.

[10]) Dieser Fall tritt z. B. bei $P(z) = z^k$ ein. Denn die Teilerzahl $\tau(n)$ von n ist bekanntlich $O(n^\varepsilon)$. (Beweis: Für $n = \prod_{p \mid n} p^\nu$ ist, wenn leere Produkte stets 1 bedeuten, $\frac{\tau(n)}{n^\varepsilon} = \prod_{p \mid n} \frac{\nu+1}{p^{\nu\varepsilon}} \leqq \prod_{\substack{p \mid n \\ p < 2^{\frac{1}{\varepsilon}}}} \frac{\nu+1}{p^{\nu\varepsilon}} \leqq \prod_{p < 2^{\frac{1}{\varepsilon}}} \frac{\nu+1}{\nu\varepsilon \log p} \leqq \prod_{p < 2^{\frac{1}{\varepsilon}}} \frac{2}{\varepsilon \log p} = A(\varepsilon)$.) Daher ist für $n > 1$ bei geradem k (weil bekanntlich die Lösungszahl von $n = u^2 + v^2$ höchstens $4\tau(n)$ ist)

$$r_{k,2}(n) \leqq 4\tau(n) = O(n^\varepsilon),$$

bei ungeradem k, wegen $h_1^k + h_2^k = (h_1 + h_2)(h_1^{k-1} - \ldots + h_2^{k-1})$,

$$r_{k,2}(n) \leqq (k-1)\tau(n) = O(n^\varepsilon).$$

Satz V: *Es gibt ein $s = s_6(k, \alpha_0)$ derart, daß für jedes durch $k!\,\alpha_0$ teilbare $n \geqq n_2(P)$ die Gleichung* (6) *lösbar ist.*

Für jedes $n \geqq 0$ hat also, $s_7(P) = s_6(k, \alpha_0) + k!\,\alpha_0 + n_2(P)$ gesetzt, die Gleichung

$$n = \sum_{\nu=1}^{s_7} n_\nu$$

eine Lösung, bei der jedes n_ν entweder $P(h_\nu)$ $(h_\nu \geqq 0)$ oder 0 oder 1 ist.

Da ferner jedes ganzzahlige $P(z)$ mit $\alpha_0 > 0$ von einer Stelle an $\geqq 0$ ist und wächst, so enthält Satz V die zuerst durch Herrn Kamke[11]) mit einer Verallgemeinerung der Hilbertschen Methode bewiesene Waringsche Vermutung:

Satz VI: *$P(z)$ sei irgendein ganzzahliges*[12]) *Polynom vom (wahren) Grade k, das für ganzzahliges $z \geqq 0$ stets $\geqq 0$ ist. Dann gibt es ein $s_8(P)$ derart, daß für jedes $n \geqq 0$ die Gleichung*

$$n = \sum_{\nu=1}^{s_8} n_\nu, \quad n_\nu = P(h_\nu)(h_\nu \geqq 0) \text{ oder } 0 \text{ oder } 1$$

lösbar ist.

Für den Kenner der Literatur bemerke ich, daß (in dem bisher mit der neuen Methode allein behandelten Fall $P(z) = z^k$) gegenüber der Hardy-Littlewoodschen Beweisführung vor allem folgendes vereinfacht ist:

1) In § 1 durch Herrn Weyl (Fareyreihe $[n^{1-\alpha}]$ statt $[n^{1-\alpha}]$) sehr und durch mich etwas weiter die Behandlung der großen Bogen (Hilfssatz 5). $S_{p,q,m}$ und $S'_{p,q,m}$ treten nicht mehr auf.

2) Im § 2 durch die neue Einführung des Hilfssatzes 8 die Behandlung der großen Bogen (Hilfssatz 11).

3) Der Beweis des Hilfssatzes 1 (Weyl; 1914) durch die Induktion beim ersten, einzigen Schritt statt der einzelnen $k - 1$ Schritte Weyls (bei denen die Induktion vom ν-ten auf den $(\nu + 1)$-ten übrigens dem Leser überlassen war).

---

[11]) *Verallgemeinerungen des Waring-Hilbertschen Satzes* [Mathematische Annalen, 83 (1921), S. 85–112; Göttinger Inauguraldissertation, 28 S.]. Übrigens beweist Herr Kamke in einer gleichzeitig erscheinenden Arbeit mit der Hilbertschen Methode, daß in Satz V des Textes (bei dem auf Grund meines Beweises von Satz IV ohne weiteres $k!\,\alpha_0$ durch den größten gemeinsamen Teiler aller $P(h) - \alpha_k$ ersetzt werden kann) s_6 von α_0 unabhängig gewählt werden kann, falls $\alpha_k = 0$ ist.

[12]) Für ein rationalzahliges $P(z)$, das für ganzzahlige $z \geqq 0$ stets gleich einer ganzen Zahl $\geqq 0$ ist, folgt, wie auch Herr Kamke (S. 111–112 bzw. 27–28) bemerkt, sofort die Richtigkeit derselben Behauptung. Denn, wenn Q der Hauptnenner der Koeffizienten ist, so ist nur Satz VI auf $QP(z)$ und Qn anzuwenden.

4) Lemma 1 braucht nicht besonders bewiesen zu werden, da es in dem ohnehin nötigen Hilfssatz 2 enthalten ist (der sich genau nach Hardy-Littlewoods Paradigma bei ihrem Lemma 4 ergibt); diese Bemerkung hat übrigens Herr Weyl schon in seiner Note gemacht.

5) Die Vergleichsfunktion $F_\sigma(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\sigma-1} x^\nu$ mit zwei erforderlichen, in Fußnote 5 der Hardy-Littlewoodschen ersten Abhandlung bewiesenen Hilfssätzen ist durch die triviale Binomialreihe ersetzt, wodurch die alte Nr. 9. 2. (i) in Wegfall kommt.

6) Die Beweisführung für (115) macht Hardy-Littlewoods Behandlung von $\Sigma \int_{\mathfrak{M}} |\Phi|^4 |dx|$ in der zweiten Abhandlung entbehrlich.

Im übrigen würde sich natürlich mein § 2, wenn man nur auf $P(z) = z^k$ zielt, etwas kürzer darstellen.

§ 1.

Hilfssatz 1: *Es sei*[13] $k \geqq 2$, $K = 2^{k-1}$;

$$P(z) = \alpha_0 z^k + \ldots + \alpha_k$$

habe reelle Koeffizienten. Es sei ψ reell, $\varrho = e^{\psi i}$; ϱ^ν bedeute stets $e^{\psi i \nu}$.[14] *Es sei m ganz, $\mu \geqq 1$ und ganz. Es werde*

$$U = U(P, \psi, m, \mu) = \sum_{h=m+1}^{m+\mu} \varrho^{P(h)}$$

gesetzt.

Dann ist

$$|U|^K \leqq (2\mu)^{K-k} \sum_{h_1, \ldots, h_{k-1}} \left| \sum_l \varrho^{\alpha_0 k! H l} \right|, \tag{9}$$

wo $h_1, \ldots, h_{k-1}$ alle Systeme ganzer Zahlen mit $\sum_{\nu=1}^{k-1} |h_\nu| \leqq \mu - 1$ durchlaufen, H zur Abkürzung statt $\prod_{\nu=1}^{k-1} h_\nu$ geschrieben ist, und l jedesmal durch $\mu - \sum_{\nu=1}^{k-1} |h_\nu|$ konsekutive ganze Zahlen läuft.

---

[13]) Für die Induktion beim Beweise ist wesentlich, daß ich nicht $\alpha_0 \neq 0$ verlange und hier ausnahmsweise $k = 2$ zulasse. Von Hilfssatz 2 an ist wieder dauernd $k \geqq 3$ gemeint.

[14]) Für § 2 ist wesentlich, daß ϱ keine Einheitswurzel zu sein braucht.

Vorbemerkung: Aus (9) folgt, weil für nicht ganzes $\frac{\psi\,\alpha_0\,k!\,H}{2\pi}$

$$\left|e^{\psi i \alpha_0 k! H l}\right| = \left|\frac{e^{\psi i \alpha_0 k! H l_1} - e^{\psi i \alpha_0 k! H (l_2+1)}}{1 - e^{\psi i \alpha_0 k! H}}\right| \leqq \frac{2}{\left|1 - e^{\psi i \alpha_0 k! H}\right|} = \frac{1}{\left|\sin \frac{\psi\,\alpha_0\,k!\,H}{2}\right|}$$

st,

$$|U|^K \leqq (2\mu)^{K-k} \sum_{h_\nu} \text{Min.}\left(\mu, \frac{1}{\left|\sin \frac{\psi\,\alpha_0\,k!\,H}{2}\right|}\right).^{15})$$

Beweis:

$$|U|^2 = \sum_{h=m+1}^{m+\mu} \varrho^{P(h)} \sum_{l=m+1}^{m+\mu} \varrho^{-P(l)} = \sum_{h,l} \varrho^{P(h)-P(l)}.$$

Wird statt h eine neue Variable $l + h_1$ eingeführt, so ist das Summationsgebiet

$$-(\mu-1) \leqq h_1 \leqq \mu - 1,$$

$$\text{Max.}\,(m+1, m+1-h_1) \leqq l \leqq \text{Min.}\,(m+\mu, m+\mu-h_1);$$

im Falle $h_1 \geqq 0$ läuft also l von $m+1$ bis $m+\mu-h_1$, im Falle $h_1 \leqq 0$ von $m+1-h_1$ bis $m+\mu$. Es ist, nach Potenzen von l geordnet,

$$P(h) - P(l) = P(l+h_1) - P(l)$$

$$= k\,\alpha_0\,h_1\,l^{k-1} + \beta_1(h_1)\,l^{k-2} + \ldots + \beta_{k-1}(h_1) = Q_{h_1}(l),$$

also sicher nicht von k-tem oder höherem Grade in l.

. (11) verwandelt sich in

$$|U|^2 = \sum_{|h_1| \leqq \mu-1} \sum_{l} \varrho^{Q_{h_1}(l)} \leqq \sum_{|h_1| \leqq \mu-1} \left|\sum_{l} \varrho^{Q_{h_1}(l)}\right|,$$

wo l durch $\mu - |h_1|$ konsekutive Zahlen läuft.

Ist $k = 2$, so enthält (12) die Behauptung (9) wegen $K - k = 0$ bebst

$$\left|\sum_{l} \varrho^{2\alpha_0 h_1 l + \beta_1(h_1)}\right| = \left|\sum_{l} \varrho^{\alpha_0 2! H l}\right|.$$

Ist $k > 2$, so folgt aus (12) zunächst[16])

$$|U|^{2^{k-1}} \leqq (2\mu)^{2^{k-2}-1} \sum_{|h_1| \leqq \mu-1} \left|\sum_{l} \varrho^{Q_{h_1}(l)}\right|^{2^{k-2}}.$$

---

[15]) Min. bedeutet μ für ganzes $\frac{\psi\,\alpha_0\,k!\,H}{2\pi}$.

[16]) Falls $c_1 \geqq 0, \ldots, c_M \geqq 0$, folgt ja, z. B. durch wiederholte Anwendung der Cauchyschen Ungleichung, $\left(\sum_{\nu=1}^{M} c_\nu\right)^{2^{k-2}} \leqq M^{2^{k-2}-1} \sum_{\nu=1}^{M} c_\nu^{2^{k-2}}$. Oben ist $M = 2\mu - 1 < 2\mu$.

Da die Behauptung für $k-1$ als bewiesen angenommen werden kann, liefert (13) weiter

$$(14)\quad |U|^{2^{k-1}} \leqq (2\mu)^{2^{k-2}-1} \sum_{|h_1|\leqq\mu-1} (2\mu)^{2^{k-2}-k+1} \sum_{h_2,\ldots,h_{k-1}} \left| \sum_{l} \varrho^{k\alpha_0 h_1 (k-1)! h_2 \cdots h_{k-1} l} \right|,$$

wo $\sum_{\nu=2}^{k-1} |h_\nu| \leqq \mu - |h_1| - 1$ ist, und das neue l jedesmal durch

$$\mu - |h_1| - \sum_{\nu=2}^{k-1} |h_\nu| = \mu - \sum_{\nu=1}^{k-1} |h_\nu|$$

konsekutive Zahlen läuft; (14) ist aber genau (9).

Hilfssatz 2: *Überdies sei*[17]) $\alpha_0 = 1$ *und* ϱ *primitive* q*-te Einheitswurzel. Dann ist für jedes* $\varepsilon > 0$

$$(15)\quad |U|^K < A_1 \mu^\varepsilon q^\varepsilon \left(\mu^{K-1} + \frac{\mu^K}{q} + \mu^{K-k} q\right),$$

wo A_1 (desgl. $A_2, \ldots, A_{19}$ nachher) *eine positive, höchstens von* k *und* ε *abhängige Konstante ist.*

Vorbemerkung: Aus (15) folgt insbesondere, $m = 0$, $\mu = q$ eingesetzt, wenn S_ϱ durch

$$(7)\quad S_\varrho = \sum_{h=1}^{q} \varrho^{P(h)}$$

erklärt wird,

$$(16)\quad |S_\varrho| < A_2 q^{1-\frac{1}{K}+\varepsilon}.$$

Beweis: Es ist

$$\varrho = e^{\frac{2\pi i p}{q}}, \quad (p, q) = 1.$$

In (10), mit $\psi = \frac{2\pi p}{q}$, werde λ zu jedem System h_ν durch

$$(17)\quad p\,k!\,H \equiv \lambda \pmod q, \quad 0 \leqq \lambda < q$$

bestimmt. Für $\frac{q}{(q, k!)} \mid H$ ist $\lambda = 0$, und ich benutze Min. $\leqq \mu$; sonst ist $\lambda > 0$, und ich benutze

$$(18)\quad \text{Min.} \leqq \frac{1}{\left|\sin \pi \frac{p\,k!\,H}{q}\right|} = \frac{1}{\left|\sin \frac{\pi\lambda}{q}\right|} \leqq A_3 q \,\text{Max.}\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{q-\lambda}\right).$$

---

[17]) Dies ist bei $P(z) = z^k$ der Fall. Wegen § 2 behalte ich in Hilfssatz 2 ein beliebiges $P(z) = z^k + \ldots$ bei.

$H = 0$ kommt höchstens $(k-1)(2\mu-1)^{k-2}$ mal vor, da mindestens eine der $k-1$ Zahlen h_ν verschwindet und jedes $|h_\nu| \leqq \mu - 1$ ist. Der Beitrag von $H = 0$ zur $\sum_{h_\nu}$ in (10) ist also

$$< A_4 \mu^{k-2} \mu = A_4 \mu^{k-1}. \tag{19}$$

Bekanntlich[18]) ist für ganzes $b > 0$ die Lösungszahl $\tau_{k-1}(b)$ von $b = u_1 \cdots u_{k-1}$ in positiven ganzen u_ν höchstens $A_5 b^\varepsilon$. Die Lösungszahl von $H = h_1 \cdots h_{k-1}$ in ganzen h_ν ist also für $H \gtrless 0$ wegen $|H| < \mu^{k-1}$

$$= 2^{k-2} \tau_{k-1}(|H|) < A_6 |H|^{\frac{\varepsilon}{k-1}} < A_6 \mu^\varepsilon. \tag{20}$$

Die Anzahl der zu einem λ gehörigen H ist, weil zwei verschiedene solche H nach (17) ihren Abstand $\geqq \frac{q}{(q, k!)} \geqq \frac{q}{k!} = A_7 q$ haben,

$$< \frac{2\mu^{k-1}}{A_7 q} + 1 = A_8 \frac{\mu^{k-1}}{q} + 1. \tag{21}$$

Im Falle $\lambda = 0$ kommen also höchstens $A_8 \frac{\mu^{k-1}}{q}$ Werte $H \gtrless 0$ in Betracht. Der Gesamtbeitrag aller ihnen entsprechenden h_ν zu $\sum_{h_\nu}$ ist also wegen (20)

$$< A_8 \frac{\mu^{k-1}}{q} A_6 \mu^\varepsilon \mu = A_9 \mu^\varepsilon \frac{\mu^k}{q}. \tag{22}$$

Für jedes $\lambda > 0$ kommen nach (20) und (21) höchstens

$$\left(A_8 \frac{\mu^{k-1}}{q} + 1\right) A_6 \mu^\varepsilon$$

Wertsysteme h_ν in Betracht. Der Gesamtbeitrag aller $\lambda > 0$ zu $\sum_{h_\nu}$ ist also wegen (18)

$$\leqq \left(A_8 \frac{\mu^{k-1}}{q} + 1\right) A_6 \mu^\varepsilon A_3 q \sum_{\lambda=1}^{q-1} \text{Max.}\left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{q-\lambda}\right) < A_{10} \mu^\varepsilon q^\varepsilon (\mu^{k-1} + q).^{19})$$

---

[18]) Denn für ganzes $b > 0$ ist $\tau_2(b) = \tau(b) \leqq A(\varepsilon) b^\varepsilon$ nach Anm. [10]); für $k > 3$ ist, da $u_1, \ldots, u_{k-2}$ Teiler von b sind, und alsdann für u_{k-1} je höchstens ein ganzzahliger Wert zur Verfügung steht, $\tau_{k-1}(b) \leqq (\tau_2(b))^{k-2} \leqq \left(A\left(\frac{\varepsilon}{k-2}\right) b^{\frac{\varepsilon}{k-2}}\right)^{k-2} = A_5 b^\varepsilon$.

[19]) $\sum_1^0$ bedeute 0.

Aus (19), (22) und (23) folgt

$$\sum_{h_\nu} < A_{11}\mu^\varepsilon q^\varepsilon\left(\mu^{k-1}+\frac{\mu^k}{q}+q\right),$$

also nach (10) die Behauptung (15).

Hilfssatz 3: *Es werde für jede primitive q-te Einheitswurzel ϱ*

$$S_\varrho = \sum_{h=1}^{q} \varrho^{h^k} \tag{3}$$

gesetzt.

1) *Dann ist die Reihe*

$$\mathfrak{S} = \sum_{\varrho} \left(\frac{S_\varrho}{q}\right)^s \varrho^{-n} \tag{4}$$

für $s > 2K$ und jedes n absolut konvergent.

2) *Ferner ist bei jedem $\delta > 0$ für $s \geqq s_3(k,\delta) > 2K$ und alle n*

$$1-\delta < \mathfrak{S} < 1+\delta.$$

Beweis: 1) Nach (16) ist für jedes $q \geqq 1$, wenn über alle $\varphi(q) \leqq q$ primitiven q-ten Einheitswurzeln $e^{\frac{2\pi i p}{q}}$, $(p,q)=1$, $0 \leqq p < q$, summiert wird,

$$\sum_p \left|\left(\frac{S_\varrho}{q}\right)^s \varrho^{-n}\right| = \sum_p \left|\frac{S_\varrho}{q}\right|^s \leqq q A_2^s q^{-\frac{s}{K}+s\varepsilon}. \tag{24}$$

Wofern bei gegebenem $s > 2K$ das ε hinreichend klein gewählt wird, steht rechts das allgemeine Glied einer konvergenten Reihe.

2) In $\mathfrak{S}$ sind die Glieder mit ϱ und $\frac{1}{\varrho}$ konjugiert komplex; $\mathfrak{S}$ ist also für $s > 2K$ reell. Für $s > 2K$ ist

$$\sum_{q=2}^{\infty} \sum_p \left|\frac{S_\varrho}{q}\right|^s \tag{25}$$

gleichmäßig konvergent, da die Konvergenz für $s = 2K+1$ soeben bewiesen wurde, und wegen $|S_\varrho| \leqq q$ (nach Definition (3)) für $s > 2K$

$$\left|\frac{S_\varrho}{q}\right|^s \leqq \left|\frac{S_\varrho}{q}\right|^{2K+1}$$

ist. Für jedes feste $q \geqq 2$ ist

$$\lim_{s=\infty} \sum_p \left|\frac{S_\varrho}{q}\right|^s = 0,$$

da bei jedem zugehörigen p

$$\left|\frac{S_\varrho}{q}\right| < 1$$

ist (weil S_ϱ die Summe von q Einheitswurzeln ist, von denen $\varrho^{q^k}=1$ und $\varrho^{1^k}=\varrho$ sicher nicht übereinstimmen). Daher strebt der Ausdruck (25) bei $s\to\infty$ gegen 0, und aus

$$|\mathfrak{S}-1|=\Big|\sum_{q=2}^{\infty}\sum_{p}\Big(\frac{S_\varrho}{q}\Big)^s\varrho^{-n}\Big|\leqq\sum_{q=2}^{\infty}\sum_{p}\Big|\frac{S_\varrho}{q}\Big|^s$$

folgt die Behauptung.

Beginn des Beweises von (5): Die Potenzreihe

$$f(x)=\sum_{h=0}^{\infty}x^{h^k}$$

ist für $|x|<1$ konvergent. Für jedes s ist

$$f^s(x)=\sum_{h=0}^{\infty}r(n)x^n, \tag{26}$$

wo

$$r(n)=r_{k,s}(n)$$

die Lösungszahl von (1) bezeichnet. Nach dem Cauchyschen Satz ist also für $n\geqq 2$, wenn $R=1-\frac{1}{n}$ gesetzt wird, bei Integration über den Kreis $x=Re^{\psi i}$ in positivem Sinne

$$r(n)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f^s(x)}{x^{n+1}}\,dx. \tag{27}$$

Es bedeute α irgendeine Zahl der Strecke $0<\alpha<a$, über die nachher[20]) verfügt werden wird.

Man betrachte alle reduzierten Brüche $\frac{p}{q}$ mit $0\leqq p\leqq q\leqq n^{1-\alpha}$, d. h. die sog. zu $[n^{1-\alpha}]$ gehörige Fareyreihe, die mit $\frac{0}{1}$ beginnt und mit $\frac{1}{1}$ schließt. Man betrachte ferner zu je zwei Nachbarbrüchen $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ dieser Reihe die sog. Mediante $\frac{p+p'}{q+q'}$. Bekanntlich[21]) ist $|pq'-qp'|=1$ und $n^{1-\alpha}<[n^{1-\alpha}]+1\leqq q+q'$. Der Abstand $\frac{1}{q(q+q')}$ von $\frac{p}{q}$ zur Mediante liegt also wegen $q+q'\leqq 2[n^{1-\alpha}]\leqq 2n^{1-\alpha}$ zwischen $\frac{1}{2qn^{1-\alpha}}$ inkl. und $\frac{1}{qn^{1-\alpha}}$ exkl.

---

[20]) Wegen § 2 erst nachher.

[21]) Vgl. z. B. meine Arbeit *Über Dirichlets Teilerproblem* [Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, Jahrgang 1920, S. 13—32], S. 17—18.

Werden die genannten Fareybrüche und Medianten für $\frac{\psi}{2\pi}$ auf dem Integrationsweg markiert, so entsprechen den Fareybrüchen die Schnittpunkte des Kreises $|x| = R$ mit den Radien, die zu den Einheitswurzeln der Grade $q \leqq n^{1-\alpha}$ führen; hierbei entspricht den Brüchen $\frac{0}{1}$ und $\frac{1}{1}$ derselbe Punkt $x = R$. Die den Medianten entsprechenden Punkte zerlegen also den Kreis in $\sum_{q \leqq n^{1-\alpha}} \varphi(q)$ Bogen, deren jeder genau ein $R\varrho$, $\varrho = e^{\frac{2\pi i p}{q}}$, $(p, q) = 1$, $0 \leqq p < q \leqq n^{1-\alpha}$ innen enthält. Der zu ϱ gehörige Bogen hat die Gestalt

$$x = \varrho X = R\varrho e^{\vartheta i}, \qquad \vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2,$$

wo

$$(28) \qquad -\frac{2\pi}{q n^{1-\alpha}} < \vartheta_1 \leqq -\frac{\pi}{q n^{1-\alpha}}, \qquad \frac{\pi}{q n^{1-\alpha}} \leqq \vartheta_2 < \frac{2\pi}{q n^{1-\alpha}}.$$

Die Bogen mit $q \leqq n^\alpha$ heißen *große*, die mit $q > n^\alpha$ *kleine*. Auf jedem großen oder kleinen Bogen ist nach (28)

$$|1 - X| \leqq (1 - |X|) + ||X| - X| = \frac{1}{n} + R|e^{\vartheta i} - 1|$$

$$\leqq \frac{1}{n} + 2\left|\sin\frac{\vartheta}{2}\right| \leqq \frac{1}{n} + |\vartheta| < \frac{1}{n}\left(1 + 2\pi\frac{n^\alpha}{q}\right),$$

also auf jedem großen Bogen

$$(29) \qquad \frac{|1-X|}{1-|X|} < (1 + 2\pi)\frac{n^\alpha}{q} < 8\frac{n^\alpha}{q},$$

auf jedem kleinen Bogen

$$(30) \qquad \frac{|1-X|}{1-|X|} < 1 + 2\pi < 8.$$

Für $-\pi \leqq \vartheta \leqq \pi$, d. h. auf dem ganzen Kreise, ist

$$|1 - X| = \sqrt{1 - 2R\cos\vartheta + R^2} = \sqrt{(1-R)^2 + 4R\sin^2\frac{\vartheta}{2}}$$

$$(31) \qquad \geqq \sqrt{\frac{1}{n^2} + 2\sin^2\frac{\vartheta}{2}} > A_{12}\sqrt{\frac{1}{n^2} + \vartheta^2}.$$

Hilfssatz 4: *Auf jedem kleinen Bogen ist für jedes* $\varepsilon > 0$

$$(32) \qquad |f(x)| < A_{13} n^{\alpha - \frac{\alpha}{K} + \varepsilon}.$$ [22])

[22]) A_{13} ist von α unabhängig. Übrigens kommt es darauf nicht an, da über α hier und in § 2 als Funktion von κ verfügt werden wird. Dasselbe gilt von späteren A.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\varepsilon < 1$. Ich setze

$$\omega = \left[n^{a+\frac{\varepsilon}{2}} \right],$$

ferner für ganzes $m \geqq 0$ (wenn ϱ die zum Bogen gehörige Einheitswurzel ist)

$$T_m = \sum_{0 \leqq h^k \leqq m} \varrho^{h^k} = \sum_{h=0}^{[m^a]} \varrho^{h^k}. \tag{33}$$

Nach (15) ist für $m \leqq \omega^k$, wegen $[m^a] \leqq \omega \leqq n^{a+\frac{\varepsilon}{2}}$ $(< n)$ nebst $\alpha < a$, $n^\alpha < q \leqq n^{1-\alpha}$ und $K \geqq 4$,

$$\begin{aligned} |T_m| &< 1 + \left(A_1 n^\varepsilon n^\varepsilon \left(n^{(K-1)\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)} + \frac{n^{K\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)}}{n^\alpha} + n^{(K-1)\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)} n^{1-\alpha} \right) \right)^{\frac{1}{K}} \\ &< 1 + A_{14} \left(n^{2\varepsilon} \left(n^{Ka-a+K\frac{\varepsilon}{2}} + n^{Ka-a+K\frac{\varepsilon}{2}} + n^{Ka-a+K\frac{\varepsilon}{2}} \right) \right)^{\frac{1}{K}} \\ &< A_{15} n^{a-\frac{a}{K}+\varepsilon}. \end{aligned} \tag{34}$$

Ich zerlege

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \tag{35}$$

wo

$$f_1(x) = \sum_{h=0}^{\omega} x^{h^k} = \sum_{h=0}^{\omega} \varrho^{h^k} X^{h^k}, \qquad f_2(x) = \sum_{h=\omega+1}^{\infty} x^{h^k}.$$

Hierin ist, wenn T_{-1} Null bedeutet,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sum_{m=0}^{\omega^k} (T_m - T_{m-1}) X^m = \sum_{m=0}^{\omega^k} T_m (X^m - X^{m+1}) + T_{\omega^k} X^{\omega^k+1} \\ &= (1-X) \sum_{m=0}^{\omega^k} T_m X^m + T_{\omega^k} X^{\omega^k+1}, \end{aligned}$$

also nach (34) und (30)

$$\begin{aligned} |f_1(x)| &< |1-X| A_{15} n^{a-\frac{a}{K}+\varepsilon} \sum_{m=0}^{\infty} |X|^m + A_{15} n^{a-\frac{a}{K}+\varepsilon} \\ &\leqq 2 A_{15} n^{a-\frac{a}{K}+\varepsilon} \frac{|1-X|}{1-|X|} < 16 A_{15} n^{a-\frac{a}{K}+\varepsilon}. \end{aligned} \tag{36}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} |f_2(x)| &\leqq \sum_{h=\omega+1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{h^k} < \sum_{h=\omega+1}^{\infty} e^{-\frac{h^k}{n}} < \int_{\omega}^{\infty} e^{-\frac{h^k}{n}} dh = n^a \int_{\omega n^{-a}}^{\infty} e^{-y^k} dy \\ &< n^a \int_{\frac{1}{2} n^{-\frac{\varepsilon}{2}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} y^k} e^{-\frac{1}{2} y^k} dy < n^a e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} n^{-\frac{\varepsilon}{2}}\right)^k} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2} y^k} dy < A_{16}. \end{aligned} \tag{37}$$

Aus (35), (36), (37) folgt (32).

Hilfssatz 5: *Auf jedem großen Bogen ist, wenn*

$$\varphi_\varrho(x) = \Gamma(1+a)\frac{S_\varrho}{q}(1-X)^{-a} \tag{38}$$

(wo $(1-X)^{-a} = 1 + aX + \ldots$) *und*

$$\Phi_\varrho(x) = f(x) - \varphi_\varrho(x) \tag{39}$$

gesetzt wird,

$$|\Phi_\varrho(x)| < A_{17}\, n^a. \tag{40}$$

Beweis: T_m werde durch (33) erklärt. Dann ist

$$f(x) = (1-X)\sum_{m=0}^{\infty} T_m X^m. \tag{41}$$

Es ist [23])

$$T_m = \sum_{h=0}^{\left[\frac{m^a}{q}\right]q-1} \varrho^{hk} + \sum_{h=\left[\frac{m^a}{q}\right]q}^{[m^a]} \varrho^{hk},$$

also, da die erste Summe rechts $= \left[\frac{m^a}{q}\right] S_\varrho$ ist und die zweite höchstens q Glieder hat,

$$\left| T_m - \left[\frac{m^a}{q}\right] S_\varrho \right| \leqq q,$$

$$\left| T_m - m^a \frac{S_\varrho}{q} \right| < 2q. \tag{42}$$

Andererseits ist

$$\varphi_\varrho(x) = (1-X)\Gamma(1+a)\frac{S_\varrho}{q}(1-X)^{-a-1} = (1-X)\sum_{m=0}^{\infty} V_m X^m \tag{43}$$

mit

$$V_m = \frac{S_\varrho}{q}\Gamma(1+a)\binom{-a-1}{m}(-1)^m = \frac{S_\varrho}{q}\Gamma(a+1)\frac{(a+1)\cdots(a+m)}{m!}\ [24])$$

$$= \frac{S_\varrho}{q}\frac{\Gamma(a+1+m)}{\Gamma(1+m)}.$$

Wegen

$$\left|\frac{\Gamma(a+1+m)}{\Gamma(1+m)} - m^a\right| < A_{18}$$

ist

$$\left| V_m - m^a \frac{S_\varrho}{q} \right| < A_{18}. \tag{44}$$

---

[23]) $\sum_{0}^{-1}$ bedeute 0.

[24]) Der letzte Zähler bedeutet 1 für $m = 0$.

Aus (42) und (44) folgt

$$|T_m - V_m| < A_{19}\, q, \tag{45}$$

us (39), (41), (43), (45), (29)

$$|\Phi_\varrho(x)| = \Big|(1-X)\sum_{m=0}^{\infty}(T_m - V_m)X^m\Big| < A_{19}\, q\,|1-X|\sum_{m=0}^{\infty}|X|^m$$

$$= A_{19}\, q\,\frac{|1-X|}{1-|X|} < A_{17}\, n^{\alpha}. \tag{40}$$

Schluß des Beweises von (5) (d. h. von Satz III): Ich lege jetzt fest durch

$$\alpha = \frac{a\,K}{K+1},$$

o daß

$$a - \frac{\alpha}{K} = \alpha \tag{46}$$

st. Ich wähle $\eta(k)$ so, daß die Ungleichungen

$$0 < 2\eta < a - \alpha \tag{47}$$

elten. Dann ist gewiß

$$\eta < \frac{\alpha}{4}, \quad \eta < 1 - 2\alpha \tag{48}$$

nd für $s \geqq k(K+1)+1$

$$(s-1)(a-\alpha) \geqq k(K+1)\frac{a}{K+1} = 1,$$

$$s(a-\alpha) \geqq 1 + a - \alpha > 1 + 2\eta,$$

$$s\alpha + \eta < sa - 1 - \eta. \tag{49}$$

Im Rest dieses Beweises soll $s \geqq k(K+1)+1$ sein.

Nach (32) ist, $\varepsilon = \frac{\eta}{s}$ genommen, wenn C_2 (desgl. $C_3, \ldots, C_{18}$ nachher) eine positive, höchstens von k und s abhängige Zahl ist, auf jedem kleinen Bogen (wegen (46))

$$|f(x)| < C_2\, n^{\alpha + \frac{\eta}{s}},$$

also wegen (49)

$$|f^s(x)| < C_3\, n^{s\alpha+\eta} < C_3\, n^{sa-1-\eta}.$$

Daher ist, wenn $\mathfrak{m}$ die kleinen Bogen bezeichnet (deren Gesamtlänge $< 2\pi R < 2\pi$ ist), wegen

$$|x^{n+1}| = \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)^{n+1} > C_4 \tag{50}$$

wo übrigens C_4 absolut konstant ist),

$$\Big|\sum\int_{\mathfrak{m}} \frac{f^s(x)}{x^{n+1}}\,dx\Big| < 2\pi\,\frac{1}{C_4}\,C_3\, n^{sa-1-\eta} = C_5\, n^{sa-1-\eta}. \tag{51}$$

Aus (27) und (51) folgt, wenn $\mathfrak{M}$ die großen Bogen bezeichnet,

$$\left| r(n) - \frac{1}{2\pi i} \sum \int_{\mathfrak{M}} \frac{f^s(x)}{x^{n+1}} dx \right| < C_5 n^{sa-1-\eta}. \tag{52}$$

Auf einem großen Bogen ist, kurz $\varphi_\varrho(x) = \varphi$, $\Phi_\varrho(x) = \Phi$ geschrieben,

$$|f^s(x) - \varphi^s| = |(\Phi + \varphi)^s - \varphi^s| = |\Phi^s + \ldots + s\,\Phi\varphi^{s-1}|$$
$$\leqq 2^s \text{ Max. } (|\Phi|^s, |\Phi||\varphi|^{s-1}) \leqq 2^s (|\Phi|^s + |\Phi||\varphi|^{s-1});$$

daher ist wegen (50)

$$\left| \sum \int_{\mathfrak{M}} \frac{f^s(x)}{x^{n+1}} dx - \sum \int_{\mathfrak{M}} \frac{\varphi_\varrho^s(x)}{x^{n+1}} dx \right|$$
$$\leqq C_6 \left(\sum \int_{\mathfrak{M}} |\Phi|^s |dx| + \sum \int_{\mathfrak{M}} |\Phi||\varphi|^{s-1} |dx| \right). \tag{53}$$

Nach (40) und (49) ist

$$\sum \int_{\mathfrak{M}} |\Phi|^s |dx| < C_7 n^{sa} < C_7 n^{sa-1-\eta}. \tag{54}$$

Nach (38), (16) $\left(\varepsilon = \frac{\eta}{s} \text{ genommen}\right)$ und (31) ist auf dem ganzen Kreise ($|\vartheta| \leqq \pi$)

$$|\varphi| < C_8 q^{-\frac{1}{K}} n^{\frac{\eta}{s}} \left(\frac{1}{n^2} + \vartheta^2\right)^{-\frac{a}{2}}, \tag{55}$$

also wegen (40) und $s > k+1$

$$\int_{\mathfrak{M}} |\Phi||\varphi|^{s-1} |dx| < C_9 n^{\alpha} q^{-\frac{s-1}{K}} n^{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \vartheta^2\right)^{-\frac{(s-1)a}{2}} d\vartheta$$
$$= C_{10} n^{\alpha+\eta+(s-1)a-1} q^{-\frac{s-1}{K}}; \tag{56}$$

wegen $s > 2K+1$ konvergiert

$$\sum_{\varrho} q^{-\frac{s-1}{K}} \leqq \sum_{q=1}^{\infty} q^{1-\frac{s-1}{K}},$$

und (56) liefert (wegen (47))

$$\sum \int_{\mathfrak{M}} |\Phi||\varphi|^{s-1} |dx| < C_{11} n^{\alpha+\eta+(s-1)a-1} < C_{11} n^{sa-1-\eta}. \tag{57}$$

Aus (52), (53), (54), (57) folgt

$$\left| r(n) - \frac{1}{2\pi i} \sum \int_{\mathfrak{M}} \frac{\varphi_\varrho^s(x)}{x^{n+1}} dx \right| < C_{12} n^{sa-1-\eta}. \tag{58}$$

$\mathfrak{R}$ bezeichne den Vollkreis $|x| = R$. Nach (28), (50) und (55) ist
egen $s > k$)

$$\left| \int_{\mathfrak{M}} \frac{\varphi_\varrho^s(x)}{x^{n+1}}\,dx - \int_{\mathfrak{R}} \frac{\varphi_\varrho^s(x)}{x^{n+1}}\,dx \right| < C_{13}\, q^{-\frac{s}{K}}\, n^\eta \int_{\frac{\pi}{q\,n^{1-\alpha}}}^{\infty} \vartheta^{-sa}\,d\vartheta$$

9) $$= C_{14}\, q^{-\frac{s}{K}}\, n^\eta\, q^{sa-1}\, n^{(1-\alpha)(sa-1)}.$$

un ist nach (38)

$$\int_{\mathfrak{R}} \frac{\varphi_\varrho^s(x)}{x^{n+1}}\,dx = (\Gamma(1+a))^s \left(\frac{S_\varrho}{q}\right)^s \varrho^{-n} \int_{\mathfrak{R}} \frac{(1-X)^{-sa}}{X^{n+1}}\,dX$$

$$= (\Gamma(1+a))^s \left(\frac{S_\varrho}{q}\right)^s \varrho^{-n}\, 2\pi i \binom{-sa}{n} (-1)^n = 2\pi i \frac{(\Gamma(1+a))^s}{\Gamma(sa)} \left(\frac{S_\varrho}{q}\right)^s \varrho^{-n} \frac{\Gamma(sa+n)}{\Gamma(1+n)}.$$

s (59) und (60) folgt, wegen $a - \frac{1}{K} > 0$, (46), $2\alpha - 1 < 0$ und (49),

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \sum \int_{\mathfrak{M}} \frac{\varphi_\varrho^s(x)}{x^{n+1}}\,dx - \frac{(\Gamma(1+a))^s}{\Gamma(sa)} \frac{\Gamma(sa+n)}{\Gamma(1+n)} \sum_{q \leqq n^\alpha} \sum_p \left(\frac{S_\varrho}{q}\right)^s \varrho^{-n} \right|$$

$$< C_{14}\, n^{\eta+(1-\alpha)(sa-1)} \sum_{q \leqq n^\alpha} q^{s\left(a-\frac{1}{K}\right)} \leqq C_{14}\, n^{\eta+sa-s\alpha a-1+\alpha+\alpha+s\alpha a-\frac{s\alpha}{K}}$$

1) $$= C_{14}\, n^{sa+\eta+2\alpha-1} < C_{14}\, n^{sa+\eta} < C_{14}\, n^{sa-1-\eta}.$$

Nun ist, wegen

$$\left| \frac{\Gamma(sa+n)}{\Gamma(1+n)} - n^{sa-1} \right| < C_{15}\, n^{sa-2}$$

d der zweiten Ungleichung (48),

$$\left| \frac{\Gamma(sa+n)}{\Gamma(1+n)} \sum_{q \leqq n^\alpha} \sum_p \left(\frac{S_\varrho}{q}\right)^s \varrho^{-n} - n^{sa-1} \sum_{q \leqq n^\alpha} \sum_p \left(\frac{S_\varrho}{q}\right)^s \varrho^{-n} \right| < C_{15}\, n^{sa-2} \sum_{q \leqq n^\alpha} q$$

2) $$\leqq C_{15}\, n^{sa-2+2\alpha} < C_{15}\, n^{sa-1-\eta}.$$

Aus (58), (61) und (62) folgt

3) $$\left| r(n) - \frac{(\Gamma(1+a))^s}{\Gamma(sa)}\, n^{sa-1} \sum_{q \leqq n^\alpha} \sum_p \left(\frac{S_\varrho}{q}\right)^s \varrho^{-n} \right| < C_{16}\, n^{sa-1-\eta}.$$

Nach (24) ($\varepsilon = \frac{1}{4K}$ genommen) und der ersten Ungleichung (48)
wegen $s > 3K$

4) $$\left| \sum_{q > n^\alpha} \sum_p \left(\frac{S_\varrho}{q}\right)^s \varrho^{-n} \right| < C_{17} \sum_{q > n^\alpha} q^{1-\frac{3s}{4K}} < C_{17} \sum_{q > n^\alpha} q^{-\frac{5}{4}} < C_{18}\, n^{-\frac{\alpha}{4}} < C_{18}\, n^{-\eta}.$$

(63) und (64) ergeben

$$\left| r(n) - \frac{(\Gamma(1+\alpha))^s}{\Gamma(s\,\alpha)} n^{s\alpha-1} \mathfrak{S} \right| < C_1 n^{s\alpha-1-\eta},$$

womit (5) bewiesen ist.

§ 2.

Hilfssatz 6: *Unter den Voraussetzungen von Hilfssatz 1 ist, wen überdies $k > 2$, $\alpha_0 > 0$ und ganz, ϱ primitive q-te Einheitswurzel is für jedes $\varepsilon > 0$*

$$|U|^K < A_1 \alpha_0 \mu^\varepsilon q^\varepsilon \left(\mu^{K-1} + \frac{\mu^K}{q} + \mu^{K-k} q\right). \tag{65}$$

Vorbemerkung: Aus (65) folgt für $1 \leqq \mu \leqq q$

$$|U| < B_1 q^{1-\frac{1}{K}+\varepsilon}, \tag{66}$$

wo B_1 (desgl. $B_2, \ldots, B_{16}$ nachher) eine positive, höchstens von k, α und ε abhängige Konstante ist; noch spezieller ($m = 0$, $\mu = q$), wenn S durch

$$S_\varrho = \sum_{h=1}^{q} \varrho^{P(h)} \tag{7}$$

erklärt wird,

$$|S_\varrho| < B_1 q^{1-\frac{1}{K}+\varepsilon}. \tag{67}$$

Beweis: Wird $(q, \alpha_0) = d$, $\frac{q}{d} = q'$ gesetzt, so ist

$$\varrho^{P(h)} = e^{\frac{2\pi i p}{q}(\alpha_0 h^k + \ldots + \alpha_k)} = e^{\frac{2\pi i p \alpha_0}{q}\left(h^k + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} h^{k-1} + \ldots + \frac{\alpha_k}{\alpha_0}\right)},$$

also, da $e^{\frac{2\pi i p \alpha_0}{q}}$ primitive q'-te Einheitswurzel ist, nach der auf $\frac{P(}{\alpha_0}$ anzuwendenden Ungleichung (15) (wegen $d \leqq \alpha_0$)

$$|U|^K < A_1 \mu^\varepsilon q'^\varepsilon \left(\mu^{K-1} + \frac{\mu^K}{q'} + \mu^{K-k} q'\right)$$

$$\leqq A_1 \mu^\varepsilon q^\varepsilon \left(\mu^{K-1} + \frac{\mu^K \alpha_0}{q} + \mu^{K-k} q\right) \leqq A_1 \alpha_0 \mu^\varepsilon q^\varepsilon \left(\mu^{K-1} + \frac{\mu^K}{q} + \mu^{K-k} q\right)$$

Hilfssatz 7: *Es seien alle Koeffizienten von $P(z)$ ganz, $\alpha_0 > 0$.*

1) *Dann ist die Reihe*

$$\mathfrak{S} = \sum_{\varrho} \left(\frac{S_\varrho}{q}\right)^s \varrho^{-n} \tag{4}$$

für $s > 2K$ und jedes n absolut konvergent.

2) *Ferner ist bei jedem $\delta > 0$ für $s \geqq s_5(k, \alpha_0, \delta) > 2K$, $k!\,\alpha_0 \mid s$, $k!\,\alpha_0 \mid n$*

$$M - \delta < \mathfrak{S} < M + \delta,$$

die positive ganze Zahl

$$M = \sum \varphi(q)$$

r alle q ist, welche identisch in $P(h) - \alpha_k$ aufgehen.

Vorbemerkung: Nach Fußnote [9]) sind diese q in endlicher Anzahl nanden, nämlich $q \mid k!\,(\alpha_0, \ldots, \alpha_{k-1}) \mid k!\,\alpha_0$.

Beweis: 1) Nach (67) ist bei festem q

$$\sum_p \left| \left(\frac{S_\varrho}{q}\right)^s \varrho^{-n} \right| = \sum_p \left| \frac{S_\varrho}{q} \right|^s \leqq q\, B_1^s\, q^{-\frac{s}{K}+s\varepsilon},$$

für $s > 2K$ bei passendem ε das allgemeine Glied einer konvergenten he steht.

2) In $\mathfrak{S}$ sind die Glieder mit ϱ und $\frac{1}{\varrho}$ konjugiert komplex; $\mathfrak{S}$ ist für $s > 2K$ reell. Es werde $\varepsilon = \frac{1}{4K}$ gewählt, so daß B_1 höchstens k und α_0 abhängt. Für $[B_1^{4K}] + 1 = \nu = \nu(k, \alpha_0)$ und $q > \nu$ ist

$$B_1 < \nu^{\frac{1}{4K}} < q^{\frac{1}{4K}}.$$

) und (69) ergeben für $s > 4K$

$$\sum_{q=\nu+1}^{\infty} \sum_p \left| \frac{S_\varrho}{q} \right|^s \leqq \sum_{q=\nu+1}^{\infty} q \cdot q^{-\frac{s}{2K}} = \sum_{q=\nu+1}^{\infty} q^{1-\frac{s}{2K}},$$

für $s \geqq s_9(k, \alpha_0, \delta)$

$$\left| \sum_{q=\nu+1}^{\infty} \sum_p \left(\frac{S_\varrho}{q}\right)^s \varrho^{-n} \right| < \frac{\delta}{2}.$$

Was den Anfang

$$\sum_{q=1}^{\nu} \sum_p \left(\frac{S_\varrho}{q}\right)^s \varrho^{-n}$$

n $\mathfrak{S}$ betrifft, so enthält er (da wegen (67) und (69) für $q > \nu$

$$\left| \frac{S_\varrho}{q} \right| < q^{-\frac{1}{2K}} < 1$$

r) alle q, die für $h = 1, \ldots, q$, also identisch in $P(h) - \alpha_k$ aufgehen; diese ist

$$\left(\frac{S_\varrho}{q}\right)^s \varrho^{-n} = \left(e^{\frac{2\pi i p \alpha_k}{q}}\right)^s e^{-\frac{2\pi i p n}{q}}.$$

lls $k!\,\alpha_0 \mid s$ und $k!\,\alpha_0 \mid n$ ist, so sind also jene M Glieder sämtn $= 1$. In jedem anderen Glied mit $q \leqq \nu$ ist

$$\left| \frac{S_\varrho}{q} \right| < B_2 < 1,$$

da S_ϱ Summe von q nicht sämtlich gleichen Einheitswurzeln des Grades $\leqq \nu(k, \alpha_0)$ ist. Für $s \geqq s_{10}(k, \alpha_0, \delta)$, $k!\,\alpha_0 \mid s$, $k!\,\alpha_0 \mid n$ ist also

$$\left| \sum_{q=1}^{\nu} \sum_{p} \left(\frac{S_\varrho}{q}\right)^s \varrho^{-n} - M \right| < \frac{\delta}{2};$$

in Verbindung mit (70) ergibt sich also für $s \geqq s_5(k, \alpha_0, \delta) > 2K$

$$|\mathfrak{S} - M| < \delta,$$
$$M - \delta < \mathfrak{S} < M + \delta.$$

Hilfssatz 8: *Es habe $P(z) = \alpha_0 z^k + \ldots + \alpha_k$ reelle Koeffizienten; α_0 sei > 0 und ganz. Es sei $\alpha = \alpha(k)$ fest und nur durch $0 < \alpha < a$ eingeschränkt*[25]*. Dann ist für*

$$q \leqq n^a, \quad (p, q) = 1, \quad 1 \leqq \mu \leqq n^{a+\varepsilon}, \quad \frac{1}{n}\left(\frac{n^a}{q}\right)^{\frac{K}{K+1}} \leqq |\vartheta| \leqq \frac{\pi}{q\,\alpha_0\,k!\,\mu^{k-1}},$$

wenn

$$U = U_\mu = \sum_{h=1}^{\mu} e^{i\left(2\pi\frac{p}{q}+\vartheta\right)P(h)}$$

gesetzt wird,

$$|U| < B_3\, n^{\frac{aK}{K+1}+\varepsilon}. \tag{71}$$

Beweis: Ich stütze mich, mit $\psi = 2\pi\frac{p}{q} + \vartheta$, auf (10) und verfahre ähnlich wie beim Beweise des Hilfssatzes 2. (10) besagt

$$|U|^K \leqq (2\mu)^{K-k} \sum_{h_\nu} \text{Min.}\left(\mu, \frac{1}{\left|\sin\pi\left(\frac{p\,\alpha_0\,k!\,H}{q} + \frac{\alpha_0\,k!\,H\vartheta}{2\pi}\right)\right|}\right). \tag{72}$$

Ich zerlege

$$\sum_{h_\nu} = \sum_1 + \sum_2 + \sum_{\lambda=1}^{q-1} \sum_3(\lambda), \tag{73}$$

wo λ durch

$$p\alpha_0 k! H \equiv \lambda \pmod q, \qquad 0 \leqq \lambda < q$$

erklärt ist, und sich Σ_1 auf $H = 0$, Σ_2 auf $H \neq 0$, $\lambda = 0$, $\Sigma_3(\lambda)$ auf das betreffende $\lambda > 0$ bezieht. Es ist

$$\left|\sin\pi\left(\frac{p\,\alpha_0\,k!\,H}{q} + \frac{\alpha_0\,k!\,H\vartheta}{2\pi}\right)\right| = \left|\sin\pi\left(\frac{\lambda}{q} + \frac{\alpha_0\,k!\,H\vartheta}{2\pi}\right)\right|. \tag{74}$$

$H = 0$ kommt höchstens $(k-1)(2\mu-1)^{k-2}$ mal vor; also ist

$$\sum_1 < A_4\,\mu^{k-1} \leqq A_4\, n^{1-a+k\varepsilon} \leqq A_4\, n^{1-\frac{aK}{K+1}+k\varepsilon}. \tag{75}$$

[25]) Die folgenden B-Konstanten hängen eigentlich von α ab, dürfen aber für jedes feste $\alpha = \alpha(k)$ mit B bezeichnet werden.

$\lambda = 0$ kommt vor für $\frac{q}{(q, \alpha_0 k!)} \Big| H$, also in Σ_2 für $H = \pm l \frac{q}{(q, \alpha_0 k!)}$,
$\leqq l \leqq L$ mit $L < \frac{\mu^{k-1}}{q} (q, \alpha_0 k!) \leqq \frac{\mu^{k-1}}{q} \alpha_0 k! < B_4 \mu^{k-1} \leqq B_4 n^{1-a+k\varepsilon}$.
egen (74),

$$\frac{\alpha_0 k! |H|}{2n} \left(\frac{n^a}{q}\right)^{\frac{K}{K+1}} \leqq \left| \frac{\alpha_0 k! H\vartheta}{2} \right| < \frac{\pi}{2q} \leqq \frac{\pi}{2}$$

d $|H| \geqq l \frac{q}{\alpha_0 k!}$ ist hier

$$\text{n } \pi \left(\frac{p \alpha_0 k! H}{q} + \frac{\alpha_0 k! H\vartheta}{2\pi} \right) \Big| = \left| \sin \frac{\alpha_0 k! H\vartheta}{2} \right| > B_5 \frac{lq}{n} \left(\frac{n^a}{q}\right)^{\frac{K}{K+1}} \geqq B_5 l n^{\frac{aK}{K+1}-1};$$

her ist (wegen (20) mit $\frac{\varepsilon}{a+\varepsilon}$ statt ε)

$$\text{6)} \qquad \sum\nolimits_2 < B_6 n^{1-\frac{aK}{K+1}} n^{\varepsilon} \sum_{l < B_4 n^{1-a+k\varepsilon}} \frac{1}{l} < B_7 n^{1-\frac{aK}{K+1}+k\varepsilon}.$$

Verschiedene demselben $\lambda > 0$ entsprechende H haben ihren Abstand
$\frac{q}{(q, \alpha_0 k!)} \geqq \frac{q}{\alpha_0 k!} = B_8 q$; die Anzahl dieser H ist also $< B_9 \left(\frac{\mu^{k-1}}{q} + 1\right)$;
e Anzahl der zugehörigen Wertsysteme h_ν ist daher (nach (20))
$B_{10} n^{\frac{\varepsilon}{2}} \left(\frac{\mu^{k-1}}{q} + 1\right)$. Wegen (74) und

$$\left| \frac{\alpha_0 k! H\vartheta}{2\pi} \right| < \frac{1}{2q}$$

also

$$\sum\nolimits_3 (\lambda) < B_{10} n^{\frac{\varepsilon}{2}} \left(\frac{\mu^{k-1}}{q} + 1\right) \text{Max.} \left(\frac{1}{\sin \pi \frac{\lambda - \frac{1}{2}}{q}}, \frac{1}{\sin \pi \frac{\lambda + \frac{1}{2}}{q}} \right)$$

$$< B_{11} n^{\frac{\varepsilon}{2}} (\mu^{k-1} + q) \text{ Max.} \left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{q-\lambda}\right),$$

glich[19])

$$\sum_{\lambda=1}^{q-1} \sum\nolimits_3 (\lambda) < B_{12} n^{\varepsilon} (\mu^{k-1} + q) \leqq B_{12} n^{\varepsilon} \left(n^{1-a+(k-1)\varepsilon} + n^{a}\right)$$

$$\text{7)} \qquad < B_{13} n^{1-\frac{aK}{K+1}+k\varepsilon}.$$

Aus (73), (75), (76) und (77) folgt

$$\text{8)} \qquad \sum_{h_\nu} < B_{14} n^{1-\frac{aK}{K+1}+k\varepsilon}.$$

(72) und (78) ergeben schließlich

$$|U|^K < B_{15} \mu^{K-k} n^{1-\frac{aK}{K+1}+k\varepsilon} \leqq B_{15} n^{aK-1+(K-k)\varepsilon+1-\frac{aK}{K+1}+k\varepsilon}$$

$$= B_{15} n^{K\left(a-\frac{a}{K+1}\right)+K\varepsilon},$$

$$|U| < B_3 n^{a-\frac{a}{K+1}+\varepsilon} = B_3 n^{\frac{aK}{K+1}+\varepsilon}.$$

Beginn des Beweises von (8): Der Beweisbeginn von (5) bleibt bis (31) unverändert; nur ist hier

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} x^{P(h)}$$

zu setzen, und

$$r(n) = r_s(n) = r_{P,s}(n)$$

bedeutet in (26) die Lösungszahl von

$$n = \sum_{\nu=1}^{s} P(h_\nu), \qquad h_\nu \geqq 0. \tag{6}$$

Hilfssatz 9: *Auf jedem kleinen Bogen ist für jedes* $\varepsilon > 0$

$$|f(x)| < D_1 n^{a - \frac{\alpha}{K} + \varepsilon}, \tag{79}$$

wo D_1 (desgl. $D_2, \ldots, D_{23}$ nachher) *eine positive, höchstens von* P *und* ε *abhängige Konstante ist.*

Beweis: Der Beweis von (36), mit B_{16} statt A_{15}, gilt wörtlich, da (15) durch dieselbe Relation (65) mit $A_1 \alpha_0$ statt A_1 vertreten wird; T_m ist hier natürlich durch

$$T_m = \sum_{P(h) \leqq m} \varrho^{P(h)} \tag{80}$$

definiert.

$f_2(x)$ ist jetzt so zu erledigen. Auf dem ganzen[26]) Kreis $|x| = R$ ist, da für $h \geqq 1$

$$P(h) > D_2 h^k \tag{81}$$

ist,

$$|f_2(x)| \leqq \sum_{h=\omega+1}^{\infty} e^{-\frac{P(h)}{n}} < \sum_{h=\omega+1}^{\infty} e^{-\frac{D_2 h^k}{n}} < \int_{\omega}^{\infty} e^{-\frac{D_2 h^k}{n}} dh = n^a \int_{\omega n^{-a}}^{\infty} e^{-D_2 y^k} dy$$

$$< n^a \int_{\frac{1}{2} n^{\frac{\varepsilon}{2}}}^{\infty} e^{-\frac{D_2}{2} y^k} e^{-\frac{D_2}{2} y^k} dy < n^a e^{-\frac{D_2}{2}\left(\frac{1}{2} n^{\frac{\varepsilon}{2}}\right)^k} \int_0^{\infty} e^{-\frac{D_2}{2} y^k} dy < D_3. \tag{82}$$

Hilfssatz 10: 1) *Für jedes* $\varepsilon > 0$ *ist*

$$\left| \sum \int_{\mathfrak{M}} \frac{f^s(x)}{x^{n+1}} dx \right| < D_4^s n^{s\left(a - \frac{\alpha}{K}\right) + s\varepsilon}. \tag{83}$$

2) *Falls für jedes* $\varepsilon > 0$

$$r_{P,2}(n) = r_2(n) = O(n^\varepsilon) \tag{84}$$

[26]) Ich spreche vom ganzen Kreis wegen einer späteren Anwendung auf die großen Bogen.

ist, ist sogar [27]*), wofern* $s > 4$, *für jedes* $\varepsilon > 0$

$$\left| \sum \int_{\mathfrak{m}} \frac{f^s(x)}{x^{n+1}} dx \right| < D_5^s n^{(s-4)\left(a-\frac{\alpha}{K}\right)+2a+s\varepsilon}. \tag{85}$$

Beweis: 1) (83) folgt unmittelbar aus (79) und (50).

2) Aus

$$f^2(x) = \sum_{m=0}^{\infty} r_2(m) x^m$$

olgt

$$\sum \int_{\mathfrak{m}} |f^4(x)|\,|dx| \leqq \int_0^{2\pi} |f^4(R e^{\psi i})|\, d\psi = 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} r_2^2(m) R^{2m}$$

$$= 2\pi(1-R^2) \sum_{m=0}^{\infty} W(m) R^{2m}, \tag{86}$$

o

$$W(m) = \sum_{\nu=0}^{m} r_2^2(\nu).$$

Wegen (84) ist für $\nu \geqq 1$

$$r_2(\nu) < D_6 \nu^{\varepsilon}; \tag{87}$$

ndererseits ist $\sum_{\nu=0}^{m} r_2(\nu)$ die Lösungszahl von $P(h_1) + P(h_2) \leqq m$, $h_1 \geqq 0$, $_2 \geqq 0$, also höchstens das Quadrat der Lösungszahl von $P(h) \leqq m$, $h \geqq 0$. Vegen (81) folgt aus $P(h) \leqq m$, $h \geqq 1$, daß

$$h < \left(\frac{P(h)}{D_2}\right)^a \leqq D_7 m^a$$

t; daher ist für $m \geqq 1$

$$\sum_{\nu=0}^{m} r_2(\nu) < D_8 m^{2a}. \tag{88}$$

Aus (87) und (88) folgt für $m \geqq 1$

$$W(m) \leqq \underset{0 \leqq \nu \leqq m}{\text{Max.}}\, r_2(\nu) \cdot \sum_{\nu=0}^{m} r_2(\nu) < D_9 m^{2a+\varepsilon}.$$

ür $m \geqq 0$ ist daher

$$W(m) < D_{10} \binom{-2a-1-\varepsilon}{m} (-1)^m. \tag{89}$$

86) und (89) ergeben

$$\sum \int_{\mathfrak{m}} |f^4(x)|\,|dx| < D_{11}(1-R^2)(1-R^2)^{-2a-1-\varepsilon}$$

$$= D_{11}(1-R^2)^{-2a-\varepsilon} < D_{12} n^{2a+\varepsilon}. \tag{90}$$

[27]) „Sogar"; denn $-4\left(a-\frac{\alpha}{K}\right)+2a = -2a+\frac{4\alpha}{K} < -2a+\frac{4a}{K} < 0$.

Für $s > 4$ folgt aus (79), (50) und (90)

$$\sum_{\mathfrak{m}} \int \left| \frac{f^s(x)}{x^{n+1}} \right| |dx| \leqq \frac{1}{C_4} \operatorname*{Max.}_{\mathfrak{m}} |f^{s-4}(x)| \cdot \sum_{\mathfrak{m}} \int |f^4(x)|\,|dx|$$

$$< \frac{1}{C_4} D_1^{s-4} n^{(s-4)\left(a-\frac{a}{K}\right)+(s-4)\varepsilon} D_{12} n^{2a+\varepsilon} < D_5^s n^{(s-4)\left(a-\frac{a}{K}\right)+2a+s\varepsilon},$$

also (85).

Hilfssatz 11: *Auf jedem großen Bogen ist,*

$$\varphi_\varrho(x) = \frac{\Gamma(1+a)}{\alpha_0^a} \frac{S_\varrho}{q} (1-X)^{-a},$$

$$\Phi_\varrho(x) = f(x) - \varphi_\varrho(x)$$

gesetzt, für jedes $\varepsilon > 0$

$$|\Phi_\varrho(x)| < D_{13} n^{\frac{aK}{K+1}+\varepsilon}. \tag{91}$$

Beweis: Ich zerlege den Bogen $X = Re^{\vartheta i}$, $\vartheta_1 \leqq \vartheta \leqq \vartheta_2$, in

$$|\vartheta| < \frac{1}{n}\left(\frac{n^a}{q}\right)^{\frac{K}{K+1}}, \tag{I}$$

$$\frac{1}{n}\left(\frac{n^a}{q}\right)^{\frac{K}{K+1}} \leqq |\vartheta| \tag{II}$$

1) Auf (I) benutze ich

$$f(x) = (1-X)\sum_{m=0}^{\infty} T_m X^m, \tag{41}$$

wo T_m durch (80) erklärt ist.

λ laufe durch alle Zahlen $\geqq 1$, für welche $P(\lambda)$ eine ganze Zahl ist (so daß $P(\lambda)$ durch alle ganzen Zahlen $\geqq P(1)$ läuft). Dann ist

$$T_{P(\lambda)} = \sum_{P(h) \leqq P(\lambda)} \varrho^{P(h)} = \sum_{h=0}^{[\lambda]} \varrho^{P(h)} = \sum_{h=0}^{\left[\frac{\lambda}{q}\right]q-1} \varrho^{P(h)} + \sum_{h=\left[\frac{\lambda}{q}\right]q}^{[\lambda]} \varrho^{P(h)} = \left[\frac{\lambda}{q}\right] S_\varrho + \sum_{h=\left[\frac{\lambda}{q}\right]q}^{[\lambda]} \varrho^{P(h)}.$$

Da die letzte Summe höchstens q Glieder hat, ist sie nach (66) absolut $< B_1 q^{1-\frac{1}{K}+\varepsilon}$; S_ϱ nach (67) desgleichen. Daher ist

$$\left| T_{P(\lambda)} - \lambda \frac{S_\varrho}{q} \right| < 2 B_1 q^{1-\frac{1}{K}+\varepsilon} < 2 B_1 q^{1-\frac{1}{K}} n^\varepsilon. \tag{92}$$

Andererseits ist

$$\varphi_\varrho(x) = (1-X)\sum_{m=0}^{\infty} V_m X^m$$

it

$$V_m = \frac{S_\varrho}{q} \frac{1}{\alpha_0^a} \frac{\Gamma(a+1+m)}{\Gamma(1+m)},$$

$$\left| V_m - \left(\frac{m}{\alpha_0}\right)^a \frac{S_\varrho}{q} \right| < A_{18}.$$

ir die obigen λ ist also

$$\left| V_{P(\lambda)} - \left(\frac{P(\lambda)}{\alpha_0}\right)^a \frac{S_\varrho}{q} \right| < A_{18}.$$

un ist

$$\left| \left(\frac{P(\lambda)}{\alpha_0}\right)^a - \lambda \right| = \left| \left(\lambda^k \left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0 \lambda} + \ldots + \frac{\alpha_k}{\alpha_0 \lambda^k}\right)\right)^a - \lambda \right|$$

$$= \lambda \left| \left(1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_0 \lambda} + \ldots + \frac{\alpha_k}{\alpha_0 \lambda^k}\right)^a - 1 \right| < D_{14},$$

so

3) $$\left| V_{P(\lambda)} - \lambda \frac{S_\varrho}{q} \right| < D_{15}.$$

Aus (92) und (93) folgt

$$|T_{P(\lambda)} - V_{P(\lambda)}| < D_{16} q^{1-\frac{1}{K}} n^\varepsilon,$$

h. für $m \geqq P(1)$

$$|T_m - V_m| < D_{16} q^{1-\frac{1}{K}} n^\varepsilon,$$

h. für alle $m \geqq 0$

$$|T_m - V_m| < D_{17} q^{1-\frac{1}{K}} n^\varepsilon.$$

In Verbindung mit

$$|1 - X| \leqq \frac{1}{n} + |\vartheta| < \frac{2}{n} \left(\frac{n^a}{q}\right)^{\frac{K}{K+1}}$$

gibt sich also

$$|\Phi_\varrho(x)| = \left| (1-X) \sum_{m=0}^{\infty} (T_m - V_m) X^m \right| < D_{17} q^{1-\frac{1}{K}} n^\varepsilon \frac{|1-X|}{1-|X|}$$

$$< D_{17} q^{\frac{K-1}{K}} n^\varepsilon 2 \left(\frac{n^a}{q}\right)^{\frac{K}{K+1}},$$

lglich, wegen $\frac{K-1}{K} < \frac{K}{K+1}$,

4) $$|\Phi_\varrho(x)| < 2 D_{17} n^{\frac{aK}{K+1}+\varepsilon} = D_{18} n^{\frac{aK}{K+1}+\varepsilon}.$$

2) Ist (II) nicht leer, so gilt dort, wofern $\varepsilon < \frac{a-\alpha}{k-1}$ (was ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden darf) und $1 \leqq \mu \leqq n^{a+\varepsilon}$, für $n \geqq D_{19}$

5) $$|\vartheta| \leqq \frac{\pi}{q \alpha_0 k! \mu^{k-1}};$$

denn nach (28) ist

$$|\vartheta q| < \frac{2\pi}{n^{1-\alpha}},$$

und wegen $\alpha + (k-1)\varepsilon < a$ ist für $n \geqq D_{19}$

$$\frac{\pi}{\alpha_0 k! \mu^{k-1}} \geqq \frac{\pi}{\alpha_0 k! n^{1-\alpha} n^{(k-1)\varepsilon}} > \frac{2\pi}{n^{1-\alpha}}.$$

Für $2 \leqq n < D_{19}$ ist

$$|\Phi_\varrho(x)| < D_{20} < D_{20} n^{\frac{aK}{K+1}+\varepsilon}. \tag{96}$$

Es sei $n \geqq D_{19}$. Nach (82) ist, mit $\omega = [n^{a+\frac{\varepsilon}{2}}]$, auf dem ganzen Kreis

$$\left| f(x) - \sum_{h=1}^{\omega} x^{P(h)} \right| < 1 + D_3. \tag{97}$$

Auf dem Teil (II) unseres großen Bogens ist, wofern $1 \leqq \mu \leqq n^{a+\varepsilon}$, nach (95)

$$x = R\varrho e^{\vartheta i}, \qquad \frac{1}{n}\left(\frac{n^a}{q}\right)^{\frac{K}{K+1}} \leqq |\vartheta| \leqq \frac{\pi}{q\alpha_0 k! \mu^{k-1}},$$

also (71) gültig. Wird

$$Z_m = \sum_{P(0) < P(h) \leqq m} (\varrho e^{\vartheta i})^{P(h)}$$

gesetzt, so ist

$$\sum_{h=1}^{\omega} x^{P(h)} = \sum_{h=1}^{\omega} (\varrho e^{\vartheta i})^{P(h)} R^{P(h)} = (1-R) \sum_{m=1}^{P(\omega)} Z_m R^m + Z_{P(\omega)} R^{P(\omega)+1}; \tag{98}$$

für $1 \leqq m < P(1)$ ist $Z_m = 0$; für $P(1) \leqq m \leqq P(\omega)$ ist

$$Z_m = U_\mu, \qquad 1 \leqq \mu \leqq \omega \leqq n^{a+\varepsilon},$$

also nach (71)

$$|Z_m| < B_3 n^{\frac{aK}{K+1}+\varepsilon}. \tag{99}$$

(99) gilt also für $1 \leqq m \leqq P(\omega)$. Aus (97), (98) und (99) folgt

$$|f(x)| < 1 + D_3 + B_3 n^{\frac{aK}{K+1}+\varepsilon}\left((1-R)\sum_{m=0}^{\infty} R^m + 1\right) < D_{21} n^{\frac{aK}{K+1}+\varepsilon}. \tag{100}$$

Auf (II) ist andererseits wegen (67) und (31)

$$|\varphi_\varrho(x)| < D_{22} q^{-\frac{1}{K}} n^\varepsilon |\vartheta|^{-a} \leqq D_{22} q^{-\frac{1}{K}} n \; n^a \left(\frac{q}{n^a}\right)^{\frac{aK}{K+1}}. \tag{101}$$

Wegen

$$\frac{aK}{K+1} - \frac{1}{K} = \frac{1}{(K+1)K}(aK^2 - K - 1) > 0$$

t[28]) nach (101)

102) $$|\varphi_\varrho(x)| < D_{22}\, n^{-\frac{a}{K}}\, n^{\varepsilon}\, n^{a} = D_{22}\, n^{\frac{a(K-1)}{K}+\varepsilon} < D_{22}\, n^{\frac{aK}{K+1}+\varepsilon}.$$

Aus (100) und (102) folgt auf (II) für $n \geqq D_{19}$

103) $$|\Phi_\varrho(x)| = |f(x) - \varphi_\varrho(x)| < D_{23}\, n^{\frac{aK}{K+1}+\varepsilon}.$$

Mit (94), (96) und (103) ist (91) vollständig bewiesen.

Schluß des Beweises von (8) (d. h. von Satz IV): Ich setze $= (k-2)K+5$, falls $r_2(n) = O(n^{\varepsilon})$ für unser P wahr ist; anderenlls $s_4 = kK+1$. Ich lege jetzt $\alpha(k)$ fest. Für $k=3$ sei $\alpha = \frac{17}{60}$.[29]) alls $k \geqq 4$, wähle ich im ersten Falle $\alpha > 0$ so nahe unterhalb a, daß

104) $$(s_4 - 4)\left(a - \frac{\alpha}{K}\right) + 2a < s_4 a - 1$$

t. (Das geht, da für $\alpha = a$ die Gleichung

$$(s-4)\left(a - \frac{\alpha}{K}\right) + 2a = sa - 1$$

ie Wurzel $s = (k-2)K+4 < s_4$ hat.) (104) gilt auch für $k=3$ bei er obigen Wahl $\alpha = \frac{17}{60}$, da $5\left(\frac{1}{3} - \frac{17}{240}\right) + \frac{2}{3} = \frac{475}{240} < 2 = 9\cdot\frac{1}{3} - 1$ ist. alls $k \geqq 4$ und der zweite Fall vorliegt, lege ich α im Intervall $\frac{K}{K+1} < \alpha < a$ irgendwie fest. Dann ist

105) $$s_4\left(a - \frac{\alpha}{K}\right) < s_4 a - 1$$

wegen $\frac{s_4\alpha}{K} > \frac{s_4}{K}\,\frac{K}{kK+1} = 1$).

Ich wähle nun $\eta(k) > 0$ so, daß für $s_4 = (k-2)K+5$

106) $$(s_4 - 4)\left(a - \frac{\alpha}{K}\right) + 2a + \eta < s_4 a - 1 - \eta,$$

ir $s_4 = kK+1$, $k \geqq 4$

107) $$s_4\left(a - \frac{\alpha}{K}\right) + \eta < s_4 a - 1 - \eta$$

was wegen (104) und (105) für alle hinreichend kleinen η gilt) und überdies

108) $$\eta < a - \alpha$$

---

[28]) Ich verkleinere nicht, indem ich rechts n^a statt q schreibe.

[29]) Im Falle $k=3$ ist $r_2(n) = O(n^{\varepsilon})$ immer wahr. Dies folgt, wenn $\alpha_1 = 0$, aus $(h_1) + P(h_2) - 2\alpha_3 = (h_1+h_2)(\alpha_0 h_1^2 - \alpha_0 h_1 h_2 + \alpha_0 h_2^2 + \alpha_2) = n - 2\alpha_3$, was für $n > 2\alpha_3$ öchstens $2\tau(n-2\alpha_3)$ Lösungen $h_1 \geqq 0$, $h_2 \geqq 0$ hat, und nunmehr für beliebiges α_1 aus

$$27\alpha_0^2 P(z) = 27\alpha_0^3 z^3 + 27\alpha_0^2\alpha_1 z^2 + 27\alpha_0^2\alpha_2 z + 27\alpha_0^2\alpha_3 = (3\alpha_0 z + \alpha_1)^3 + (9\alpha_0\alpha_2 - 3\alpha_1^2)(3\alpha_0 z + \alpha_1) + \beta,$$

o $\beta = \beta(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ganz ist.

und

$$\eta < \frac{\alpha}{2K^2+2K} \tag{109}$$

ist. Aus (106) und (107) folgt für $s \geqq s_4$ im ersten Fall

$$(s-4)\left(a-\frac{\alpha}{K}\right)+2a+\eta < sa-1-\eta, \tag{110}$$

im zweiten Fall

$$s\left(a-\frac{\alpha}{K}\right)+\eta < sa-1-\eta; \tag{111}$$

aus (109) folgt

$$4\eta < \frac{a}{K+1}, \tag{112}$$

$$2\eta < \frac{\alpha}{K} \tag{113}$$

und

$$\eta < \frac{1}{60}. \tag{114}$$

Nach (27), (83) und (85) $\left(\text{mit } \varepsilon = \frac{\eta}{s}\right)$, (110) und (111) ist für $s \geqq s_4$ (in beiden Fällen) statt (52)

$$\left| r(n) - \frac{1}{2\pi i} \sum \int_{\mathfrak{M}} \frac{f^s(x)}{x^{n+1}} dx \right| < E_2 n^{sa-1-\eta},$$

wo E_2 (desgl. $E_3, \ldots, E_{12}$ nachher) eine positive, höchstens von P und s abhängige Konstante ist. (53) gilt buchstäblich.

Nach (91) $\left(\text{mit } \varepsilon = \frac{\eta}{s}\right)$ ist, weil die großen Bogen ihre Gesamtlänge $< 4\pi \sum_{q \leqq n^\alpha} \frac{q}{q n^{1-\alpha}} \leqq 4\pi n^{2\alpha-1}$ haben,

$$\sum \int_{\mathfrak{M}} |\Phi|^s |dx| < E_3 n^{s\frac{aK}{K+1}+\eta+2\alpha-1}. \tag{115}$$

Für $k \geqq 4$ ist wegen $s > 2K+2$

$$s\frac{aK}{K+1}+2a < sa,$$

also nach (108)

$$s\frac{aK}{K+1}+\eta+2\alpha-1 < sa-1+\eta+2(\alpha-a) < sa-1-\eta;$$

für $k=3$ ist wegen $\alpha = \frac{17}{60}$ und (114)

$$s\frac{a}{K+1}-2\eta-2\alpha \geqq \frac{3}{5}-2\eta-\frac{17}{30} = \frac{1}{30}-2\eta > 0,$$

so auch

$$s\frac{aK}{K+1}+\eta+2\alpha-1<sa-1-\eta.$$

15) liefert also jedenfalls

$$\sum\int_{\mathfrak{M}}|\Phi|^s|dx|<E_3 n^{sa-1-\eta}.$$

(55) gilt mit E_4 statt C_8 und ergibt in Verbindung mit (91) $(\varepsilon=\eta)$

$$\int_{\mathfrak{M}}|\Phi||\varphi|^{s-1}|dx|<E_5 n^{\frac{aK}{K+1}+\eta}q^{-\frac{s-1}{K}}n^{\eta}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\vartheta^2\right)^{-\frac{(s-1)a}{2}}d\vartheta$$

$$=E_6 n^{\frac{aK}{K+1}+2\eta+(s-1)a-1}q^{-\frac{s-1}{K}}.$$

Wegen $s\geqq 2K+1$ und (112) ist

$$\sum\int_{\mathfrak{M}}|\Phi||\varphi|^{s-1}|dx|\leqq E_6 n^{\frac{aK}{K+1}+2\eta+(s-1)a-1}\sum_{q\leqq n}q^{-1}<E_7 n^{\frac{aK}{K+1}+3\eta+(s-1)a-1}$$

$$=E_7 n^{sa-1-\frac{a}{K+1}+3\eta}<E_7 n^{sa-1-\eta}.$$

edenfalls kommt also (58) mit E_8 statt C_{12} heraus.

(59) gilt buchstäblich mit E_9 statt C_{14}, also (61) mit hinzugefügtem $\frac{1}{\alpha_0^{as}}$ im Subtrahendus links und der rechten Seite

$$E_9 n^{s\left(a-\frac{\alpha}{K}\right)+\eta+2\alpha-1}<E_9 n^{sa-1-\eta}$$

da wegen $s\geqq 2K+1$ nach (113)

$$-\frac{s\alpha}{K}+2\eta+2\alpha=\alpha\left(2-\frac{s}{K}\right)+2\eta\leqq-\frac{\alpha}{K}+2\eta<0$$

st). (63) mit E_{10} statt C_{16} und $\frac{1}{\alpha_0^{as}}$ im Subtrahendus links gilt also auch.

Nach (68) ist, $\varepsilon=\frac{1}{K(2K+2)}$ genommen, wegen $s\geqq 2K+1$ und (109)

$$\left|\sum_{q>n^\alpha}\sum_{p}\left(\frac{S_\varrho}{q}\right)^s\varrho^{-n}\right|<E_{11}\sum_{q>n^\alpha}q^{1-\frac{s(2K+1)}{K(2K+2)}}\leqq E_{11}\sum_{q>n^\alpha}q^{1-\frac{(2K+1)^2}{K(2K+2)}}$$

$$=E_{11}\sum_{q>n^\alpha}q^{-1-\frac{1}{2K^2+2K}}<E_{12}n^{-\frac{\alpha}{2K^2+2K}}<E_{12}n^{-\eta},$$

also (8) bewiesen.

Schierke, den 1. September 1921.

(Eingegangen am 3. September 1921.)

Fundamentalabbildung und Potentialbestimmung gegebener Riemannscher Flächen.

Von

Paul Koebe in Jena.

Es sei F ein endlich-vielblättriger, endlich-vielfach zusammenhängender, analytisch begrenzter Bereich mit endlich vielen Windungspunkten im Innern. Während die alten Methoden die Abbildungsaufgabe als Anwendung potentialtheoretischer[1]) Entwicklungen behandeln, gestatten die neuen, rein funktionentheoretischen Methoden der konformen Abbildung eine Umkehrung der Reihenfolge der Problemstellungen vorzunehmen[1a]).

1. Ränderzuordnung.

Wir können die Fundamentalabbildung der Fläche F rein funktionentheoretisch ausführen, d. i. die eineindeutige konforme Abbildung der zu F gehörenden einfach zusammenhängenden relativ unverzweigten Überlagerungsfläche $F^{(\infty)}$ auf die Fläche eines ζ-Einheitskreises. Denken wir uns diese Abbildung zunächst nur für die inneren Punkte des Bereichs erklärt, so kann nunmehr durch eine besondere Untersuchung dargetan werden, daß die Abbildungsfunktion $\zeta(z)$ auch längs der Randlinien regulär, in den Eckpunkten zwischen den einzelnen regulär analytischen Begrenzungsteilen jedenfalls stetig ist. Dies ergibt sich unter Einführung einer bemerkenswerten Modifikation gegenüber meinen früheren Entwicklungen zur Frage der Ränderzuordnung[2]) bei analytisch oder allgemeiner stetig begrenzten Bereichen folgendermaßen.

---

[1]) Riemann-Hilbert: Dirichletsches Prinzip; Schwarz und C. Neumann: Alternierendes Verfahren; Poincaré: Methode de balayage.

[1a]) Vgl. eine Bemerkung am Schlusse meines Artikels, „Über eine neue Methode der konformen Abbildung und Uniformisierung", Gött. Nachr. 1912, S. 848.

[2]) S. meinen Artikel, „Ränderzuordnung bei konformer Abbildung", Gött. Nachr. 1913, S. 286–288 und besonders „Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. I", dritter Teil, Journ f. Math. **145** (1915), S. 205–219.

Die Fläche F kann als Teil einer Fläche F' aufgefaßt werden, die s F durch äußere Anfügung zweifach zusammenhängender schmaler ächenstreifen entsteht. Die Funktion $\zeta'(z)$, die die Fundamentalabbildung r Fläche F' leistet, liefert gleichzeitig eine völlig reguläre Übertragung r Fläche $F^{(\infty)}$ auf einen schlichten einfach zusammenhängenden Bereich Φ. ie Untersuchung der Ränderzuordnung für die Fundamentalabbildung der äche F ist dadurch auf die Untersuchung der Ränderzuordnung für die bildung des Bereiches Φ auf das Innere des ζ-Einheitskreises zurückführt, d. h. auf die Untersuchung der Abbildungsfunktion $\zeta(\zeta')$.

Sei λ ein analytisches Begrenzungsstück des Bereichs Φ. Die Funkon $\zeta(\zeta')$ muß sich dann in jedem Begrenzungspunkte ζ_0' von λ zunächst etig verhalten. Denn andernfalls würde man innerhalb Φ in beliebiger ähe der Stelle ζ_0' Linienstücke beliebig kleiner Länge angeben können, nen in der ζ-Ebene Linien entsprechen würden, die sich gleichmäßig r Peripherie des Einheitskreises annähern und dabei Amplitudenschwanngen hätten, die für alle diese Linien oberhalb einer von Null verhiedenen Schranke γ bleiben. Dies bedingt, daß es ein endliches Pepheriestück des ζ-Einheitskreises gibt, längs dessen ganzer Ausdehnung lche Linien in beliebiger Nähe verlaufen würden. Bedenkt man nun, ß die Funktion $\zeta'(\zeta)$ innerhalb des ζ-Einheitskreises beschränkt ist, daß rner die Funktionswerte auf den genannten Linien sich schließlich auf n Wert ζ_0' reduzieren, so folgt, daß die Funktion $\zeta'(\zeta)$ überhaupt eine onstante wäre[2a]). Da dies jedoch nicht der Fall ist, ergibt sich somit e Stetigkeit der Funktion $\zeta(\zeta')$ und folglich auch der Funktion $\zeta(z)$ ngs jedes analytischen Begrenzungsteiles, offenbar auch in den Ecken, e von analytischen Begrenzungsteilen gebildet werden, ferner überhaupt ch für Begrenzungsteile vom Charakter Jordanscher Kurvenstücke.

Wir wollen die angedeutete Verallgemeinerung auf Jordansche Benzungsstücke hier nicht weiter verfolgen, verweisen diesbezüglich vielehr auf unsere oben zitierte Abhandlung. Wir setzen jetzt die Betrachng für ein analytisches Begrenzungsstück in folgender Weise fort.

Die Funktion $\zeta(\zeta')$, von der wir bereits wissen, daß sie längs eines alytischen Begrenzungsstückes stetig ist, kann niemals längs eines solchen eils oder eines Stückes davon konstant sein. Denn dies würde wiederum r Folge haben, daß die Funktion $\zeta(\zeta')$ sich überhaupt auf eine Konstante duziert. Somit wird ein analytisches Begrenzungsstück λ des Bereiches Φ nd damit auch ein analytisches Begrenzungsstück l des Bereiches F nter Aufrechterhaltung der Anordnung der Punkte stetig eineindeutig auf n entsprechendes Stück der Peripherie des ζ-Einheitskreises übertragen.

[2a]) Siehe meine genannte Abhandlung in Journ. f. Math. **145**, S. 213.

Um nun weiter die *Regularität* der Abbildungsfunktion $\zeta(z)$ längs l nachzuweisen, gehen wir von dem gewonnenen Ergebnis der Stetigkeit dieser Abbildung aus. Wir machen eine reguläre Hilfsabbildung eines l einbettenden Flächenteiles, bei der l selbst in ein Stück BC der Achse des Reellen übergeht. Es sei $z'(z)$ die Abbildungsfunktion; es sei ferner A ein Punkt innerhalb des Intervalls BC. Dann beschreiben wir um A als Mittelpunkt einen kleinen Kreis, der eine ganz in dem gefundenen Flächenstreifen enthaltene Kreisfläche K einschließt. Die obere Halbkreisfläche K' erscheint jetzt auf ein zweieckförmiges Teilgebiet φ der ζ-Einheitskreisfläche abgebildet, dessen Begrenzung aus zwei analytischen Linienstücken besteht, einem innerhalb des ζ-Einheitskreises verlaufenden und einem Stück $\beta\gamma$ des ζ-Einheitskreises selbst. Durch lineare Transformation verwandeln wir das Gebiet φ in ein anderes φ', indem wir dem Intervall $\beta\gamma$ ein Intervall $\beta'\gamma'$ der Achse des Reellen entsprechen lassen. Spiegeln wir φ' an der Achse des Reellen, so entsteht ein größerer symmetrischer Bereich $(\varphi' + \varphi'')$. Es ist dann eine Abbildungsbeziehung zwischen der Kreisfläche K und dem Gebiete $(\varphi' + \varphi'')$ hergestellt, bei der dem reellen Intervall BC das reelle Intervall $\beta'\gamma'$ stetig entspricht. Nun kann man aber eine solche Abbildung zwischen K und $(\varphi' + \varphi'')$ auch direkt dadurch gewinnen, daß man die Fundamentalabbildung des Bereiches $(\varphi' + \varphi'')$ auf die Fläche K vornimmt, wobei auch der Symmetrie genügt werden kann. Diese Abbildung ist innerhalb des reellen Intervalls jedenfalls regulär. Sie muß mit der vorbetrachteten Abbildung übereinstimmend werden, wenn man abgesehen von der bereits richtig beibehaltenen Zuordnung der Intervallendpunkte auch noch von einem inneren Punkte des Intervalls den zugeordneten Punkt in derselben Weise bestimmt wie bei jener Abbildung. Man hat dann nämlich zwei Abbildungen der Fläche φ' auf die Halbkreisfläche K', bei der drei Randpunktpaare in gleicher Weise zugeordnet sind.

2. Gewöhnliche Randwertaufgabe.

Es sei nunmehr die gewöhnliche Randwertaufgabe für den Bereich F zu lösen. Wir denken uns dazu die Fläche F zweckmäßig längs $q + 2p$ Querschnitten von Rand zu Rand zu einer einfach zusammenhängenden Fläche F_0 aufgeschnitten. Die Fläche $F^{(\infty)}$ entsteht durch sukzessive relationenfreie Aneinanderheftung unendlich vieler Exemplare F_0. Dem Grundexemplar F_0 entspricht in der ζ-Ebene ein Bereich Φ_0 mit $2p$ Querschnittseiten, die paarweise durch hyperbolische lineare Substitutionen einander zugeordnet sind. Diese Substitutionen erzeugen die Fundamentalgruppe Γ. Bei Ausübung dieser Fundamentalgruppe auf Φ_0 ergeben sich unendlich viele Bilder von Φ_0, deren auf der Peripherie des ζ-Einheitskreises lie-

ende Randteile diesen Kreis bis auf unendlich viele diskret liegende Punkte ausfüllen. Diese Grenzpunkte lassen sich in endlich viele Intervalle von beliebig kleiner Gesamtlänge einschließen, weil die Summe der Längen der Bilder aller Querschnittseiten von Φ_0 wegen der eigentlichen Diskontinuität der Gruppe Γ auf der Peripherie des Einheitskreises konvergiert[3]). Überpflanzt man jetzt die gegebenen Randwerte des Bereiches F auf die Peripherie des ζ-Einheitskreises, wo sie in unendlich häufiger Wiederholung gemäß Γ erscheinen, so kann man nunmehr ohne weiteres das Poissonsche Integral für diese Randwerte ansetzen und erhält eine Potentialfunktion innerhalb des ζ-Einheitskreises, die mit Rücksicht auf die Geltung des Unitätssatzes für die Randwertaufgabe (trotz der unendlich vielen Grenzpunkte wegen der Beschränktheit der vorgegebenen Randwerte und wegen der erwähnten Einschließungsmöglichkeit der Grenzpunkte) gegenüber den Substitutionen der Gruppe Γ ungeändert bleibt, daher in der Übertragung auf F eindeutig wird, wie verlangt.

3. Einführung von polaren, logarithmischen, Arcustangens-Unstetigkeiten, von inneren und Rand-Periodizitätsmoduln.

Schreibt man außer den Randwerten auf F auch noch innere *polare* oder *logarithmische Unstetigkeiten* vor, so kann diese Aufgabe nach dem soeben gewonnenen Ergebnis auf den Fall reduziert werden, daß die Randwerte identisch null sind. Nach dieser Reduktion lassen sich dann die betreffenden Potentiale sofort durch unendliche Reihen darstellen. Man sucht im Bereiche Φ_0 die entsprechenden Unstetigkeitsstellen auf und schreibt dort die der Übertragung gemäß bestimmten Unstetigkeiten vor. Es gibt dann eine elementare Potentialfunktion, die diese Unstetigkeiten und nur diese im Innern des ζ-Einheitskreises bzw. der im folgenden statt der Kreisfläche setzbaren zugrunde gelegten oberen ζ-Halbebene hat. Diese Potentialfunktion unterwirft man sämtlichen durch die Gruppe Γ vorgeschriebenen Verpflanzungen und summiert die so entstehenden unendlich vielen Potentialen. Das Resultat ist ein automorphes Potential, das, auf F überpflanzt, die verlangte Potentialfunktion liefert[4]).

Gibt man die Randwerte null und im Innern von F zwei *Arcustangens-Unstetigkeiten* mit entgegengesetzt gleichen Periodizitätsmoduln vor, wobei man sich zweckmäßig die Fläche F bzw. F_0 längs einer die Unstetigkeitspunkte verbindenden Linie aufgeschnitten denkt, um die Potentialfunktion eindeutig zu machen, so führt das gleiche Verfahren zum

[3]) Siehe hierzu „Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. IV", § 6, Acta math. **41** (1918), S. 326–328.

[4]) Siehe hierzu l. c. Abh. IV der genannten Serie, §§ 4, 6, 7.

Ziele. Das Elementarpotential in der ζ-Ebene hat die geometrische Bedeutung der Summe der scheinbaren Größe des Bildpunktepaares jener Unstetigkeitsstellen in Φ_0 plus der scheinbaren Größe seines Spiegelpaares in bezug auf die Achse des Reellen, gesehen vom Punkte ζ aus. Das gesuchte Potential wird gefunden als Summe der scheinbaren Größen aller mit den beiden genannten äquivalenten Punktpaare, ebenfalls vom Punkte ζ aus gesehen.

Um die $2p + q - 1$ auf F existierenden überall endlichen *Potentiale erster Art* zu gewinnen, hat man einerseits das Potential zu bestimmen, das längs einer Randlinie den konstanten Wert 1, längs der übrigen Randlinien den konstanten Wert 0 hat. Diese Aufgabe subsumiert sich unter die erste oben besprochene Randwertaufgabe, ist aber direkt durch Reihenbildung lösbar. Es ergibt sich eine Darstellung als Summe der scheinbaren Größen von unendlich vielen Fixpunktepaaren (s. l. c. § 4). Zweitens muß man ein Potential konstruieren, das längs aller Randlinien den konstanten Wert null annimmt, längs eines vorgegebenen nicht zerfällenden inneren Rückkehrschnittes jedoch einen konstanten Sprung aufweist. Diese Funktion kann man aus Funktionen mit je zwei Arcustangens-Unstetigkeiten gewinnen, indem man längs des Rückkehrschnittes eine endliche Anzahl von Unstetigkeitspunkten einführt und nunmehr je zwei in der geschlossenen Reihe aufeinander folgende dieser Punkte als Paar für zwei entgegengesetzte Arcustangens-Unstetigkeiten benutzt und die erhaltenen Potentiale addiert, wobei die Unstetigkeiten zum Wegfall und der gewünschte Wertesprung längs des geschlossenen Rückkehrschnittes zum Vorschein kommt.

Sind auch Periodizitätsmoduln längs der Randlinien vorgeschrieben, so kann man, um keine Randwerte zu bevorzugen, die Randbedingung „normale Ableitung gleich null“[5]) zweckmäßig heranziehen. Sind nun keine inneren Arcustangens-Unstetigkeiten vorgeschrieben, so kann man jetzt die Randperiodizitätsmoduln zum Verschwinden bringen, indem man die zu den oben konstruierten Potentialen erster Art mit konstanten Randwerten konjugierten Potentiale, die durch die betreffenden unendlichen Reihen mitgeliefert werden, herstellt und eine geeignete Kombination derselben von der zu bestimmenden Funktion in Abzug bringt. Sind jedoch auch Arcustangens-Unstetigkeiten in endlicher Zahl im Innern gegeben, so kann im besonderen die Summe der dazugehörenden Periodizitätsmoduln null sein. Dann ist auch die Summe der Randperiodizitätsmoduln gleich null und man kann alle Randperiodizitätsmoduln zum Wegfall bringen, wenn man erstens eine lineare Kombination oben genannter

[5]) Vgl. § 8 l. c.

onjugierter Potentiale von der zu bestimmenden Funktion abzieht und eiter eine lineare Kombination von Potentialen mit je zwei Arcustangens-nstetigkeiten. Ist aber die Summe der zu den Arcustangens-Unstetigeiten gehörenden Periodizitätsmoduln nicht gleich null, so wird man urch das Abzugsverfahren auf die Bestimmung eines Potentiales geführt, as nur eine Arcustangens-Unstetigkeit im Innern und einen gleich großen andperiodizitätsmodul besitzt. Eine solche Funktion mit der normalen bleitung Null am Rande läßt sich dann aber als Summe von scheinbaren rößen in der ζ-Ebene aufbauen. Die Stammgröße ist hierbei die scheinare Größe desjenigen Punktepaares, das vom korrespondierenden Punkte er Unstetigkeitsstelle und seinem Spiegelpunktbilde in bezug auf die chse des Reellen der ζ-Ebene gebildet wird.

4. Bildung einer zu F gehörenden reellen algebraischen Kurve.

Die vorstehenden Entwicklungen geben auch die Grundlage ab, um em Bereiche F eine reelle algebraische Kurve (x, y) in demselben Sinne uzuordnen, wie dies Schottky in seiner Dissertation (Journ. f. Math. **83**) ir endlich-vielfach zusammenhängende schlichte Bereiche getan hat. Die rößen x und y werden als zwei solche Funktionen der Variablen z bestimmt, die in F abgesehen von endlich vielen Polen eindeutig und regulär ind, ferner am Rande nur reelle Werte annehmen, ferner die Eigenschaft aben, daß alle übrigen Funktionen $w(z)$ mit denselben genannten Eigenchaften sich rational durch x und y ausdrücken lassen. Um die Funkionen x und y zu bilden, genügt es offenbar, Potentiale mit nur polaren Unstetigkeiten heranzuziehen, aus denen sich durch lineare Kombination ofort solche Potentiale ergeben, deren konjugierte Potentiale sicher indeutig sind. Man kann zwecks Bildung solcher Funktionen auch mit Poincaréschen Θ-Quotienten operieren. Hat man etwa auf solche Weise ine Kurve (x, y) gewonnen und damit den zur Fläche F gehörenden eellen algebraischen Funktionenkörper, so kann man natürlich auch von ier aus die Bildung der Potentiale bzw. deren Differentiale nach bekannten Methoden vornehmen.

5. Behandlung geschlossener Riemannscher Flächen.

Es sei F eine geschlossene Riemannsche Fläche. Hier bieten sich ler Behandlung zwei Wege. Entweder man konstruiert zunächst zu F gehörige algebraische Funktionen und damit eine zugehörige algebraische Kurve (x, y), indem man die Fläche F einer Fundamentalabbildung zweckmäßig mit Relativverzweigung[6]) unterwirft und dann Poincaré-

[6]) Siehe „Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. II“, § 8, Acta nath. **40** (1916), S. 287—290.

sche Θ-Quotienten in Ansatz bringt, darnach die gewünschten Potentiale nach bekannten Methoden herstellt; oder aber, man verwandelt die Fläche F zunächst in eine berandete Fläche F' durch Entfernung etwa einer kleinen Kreisscheibe k. Mit den zu F' gehörenden Potentialen kann man dann unschwer durch Grenzübergang, indem man k sich auf einen Punkt reduzieren läßt, zu den Potentialen der Fläche F gelangen, wie dies von mir in § 4 der Abh. III der wiederholt genannten Serie in einem bestimmten Falle dargelegt ist[7]). Es macht dabei nichts aus, auch mehrere Öffnungen gleichzeitig einzuführen. Von diesen letzten Bemerkungen kann man zweckmäßig Gebrauch machen, indem man aus der Riemannschen Fläche F durch alle Blätter hindurch Kreisscheiben ausgestanzt denkt, so, daß dabei sämtliche Windungspunkte zum Fortfall kommen. Die zur so entstandenen offenen Fläche F gehörige Fundamentalveränderliche ohne relative Verzweigung ist dann identisch mit der Fundamentalveränderlichen des schlichten mehrfach zusammenhängenden Bereiches, über dem die Fläche F ausgebreitet ist[8]).

Schließlich sei noch bemerkt, daß jede geschlossene Riemannsche Fläche F durch elementare eineindeutige Abbildung in eine andere geschlossene Riemannsche Fläche mit lauter reellen Windungspunkten verwandelt werden kann. Ist nämlich etwa $a + bi$ ein nichtreeller Windungspunkt, so wird die Fläche F durch die Transformation $(z - a)^2 = z'$ auf eine andere Fläche abgebildet, deren Anzahl nichtreeller Windungspunkte um mindestens eine Einheit verringert worden ist. Durch wiederholte Anwendung solcher Transformationen kommt man also schließlich zu einer Fläche mit nur reellen Windungspunkten. Die Gesamtzahl dieser Windungspunkte hat sich dabei im allgemeinen vergrößert[9]).

---

[7]) Journ. f. Math. **147** (1917), S. 77–83.

[8]) Diese Fundamentalveränderlichen werden in Abh. II der genannten Serie mittels eines Schmiegungsverfahrens bestimmt.

[9]) Vgl. auch Poincaré in Acta math. **4** (1884), S. 246–250.

Eingegangen am 10. September 1921.)

Über einen Dirichletschen Satz.

Von

G. Herglotz in Leipzig.

In der die Theorie des allgemeinen relativ-quadratischen Körpers (Math. Ann. **51**, S. 1 u. ff.) vorbereitenden und dem Dirichletschen Zahlkörper geltenden Arbeit (Math. Ann. **45**, S. 309 u. ff.) hat Hilbert auf arithmetischem Wege den Dirichletschen Satz [1]) erschlossen, daß die Klassenzahl des Körpers $K(\sqrt{m}, \sqrt{-m})$ dem Produkt der Klassenzahlen der Körper $k(\sqrt{m})$ und $k(\sqrt{-m})$ oder der Hälfte desselben gleich ist. Für die ursprüngliche transzendente Beweismethode des Satzes wie seiner Ausdehnung auf den $K(\sqrt{m_1}, \ldots, \sqrt{m_t})$ andererseits liefert die Hilbertsche Theorie des Galoisschen Körpers in Verbindung mit den Dedekindschen Feststellungen der Beziehungen zu seinen Teilern eine einfache Fassung, wenn derselbe einem vollen Kreiskörper angehört und also seine Z-Funktion und damit nach E. Hecke auch Diskriminante leicht gewonnen werden kann. Es sei daher gestattet, jenen Dirichletschen Satz auch aus diesem Gesichtspunkt Hilbertscher Resultate zu betrachten und vorab die Z-Funktion der Unterkörper eines Kreiskörpers in eine für den beabsichtigten Zweck bequeme Form zu setzen.

1. Z-Funktion und Diskriminante der Unterkörper des Kreiskörpers.

Sei zunächst Ω ein Galoisscher Körper der Gruppe G vom Grad n und ω ein Galoisscher, zur ausgezeichneten Untergruppe g von G gehörender, Unterkörper desselben vom Grad ϱ, wobei $n = r \cdot \varrho$.

Ist dann $\mathfrak{P}_0$ ein Primidealteiler in Ω der Primzahl p, und $\mathfrak{p}_0$ der durch $\mathfrak{P}$ teilbare Primidealteiler in ω von p, so sind nach der Hilbert-Dedekindschen Theorie eines Galoisschen Körpers der Zerlegungs- und Trägheitskörper ω_z, ω_t von $\mathfrak{p}_0$ die Durchschnitte der Zerlegungs- und

[1]) Dirichlet, Werke, **1**, S. 533.

Trägheitskörper Ω_z, Ω_t von $\mathfrak{P}_0$ mit ω. Seien demnach g_z, g_t die Zerlegungs- und Trägheitsgruppe von $\mathfrak{P}_0$:

$$(1) \qquad \underbrace{G\{g_z\{g_t\{1}}_{f\cdot e\cdot m=n},$$

so gehören ω_z, ω_t als Unterkörper von Ω zu den kleinsten gemeinsamen Vielfachen: $g_z' = g_z \cdot g$, $g_t' = g_t \cdot g$ der Gruppen g_z, g_t und g:

$$(2) \qquad \underbrace{G\{g_z'\{g_t'\{g}}_{f'\cdot e'\cdot m'=\varrho},$$

und wenn weiter $\bar{g}_z$, $\bar{g}_t$ die größten gemeinsamen Teiler (Durchschnitte) der Gruppen g_z, g_t und g sind:

$$(3) \qquad \underbrace{g\{\bar{g}_z\{\bar{g}_t\{1}}_{\bar{f}\cdot\bar{e}\cdot\bar{m}=r},$$

so gilt

$$(4) \qquad f = f'\bar{f}, \quad e = e'\bar{e}, \quad m = m'\bar{m}.$$

Es gelten dann die Zerlegungen:

$$(5) \qquad \text{in } \omega: \quad p = (\mathfrak{p}_0 \cdot \mathfrak{p}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_{f'-1})^{m'} \qquad n(\mathfrak{p}_i) = p^{e'},$$

$$(6) \qquad \text{in } \Omega: \quad \mathfrak{p}_0 = (\mathfrak{P}_0 \cdot \mathfrak{P}_1 \cdot \ldots \cdot \mathfrak{P}_{\bar{f}-1})^{\bar{m}} \qquad N_r(\mathfrak{P}_i) = \mathfrak{p}_0^{\bar{e}}$$

und die Z-Funktion des Körpers ω ist:

$$(7) \qquad Z(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^{e's}}\right)^{-f'}.$$

Hier können die der Primzahl p zugeordneten Zahlen e', f' passend so erklärt werden: da

$$(8) \qquad g_z = g_t + Zg_t + Z^2 g_t + \ldots + Z^{e-1} g_t$$

ist, und demnach

$$(9) \qquad g_z' = g_t' + Zg_t' + Z^2 g_t' + \ldots + Z^{e'-1} g_t'$$

wird, so ist $Z^{e'}$ die niedrigste Potenz ($e' \geqq 1$) von Z, welche zu $g_t' = g_t \cdot g$ gehört, während $e'f' = G/g_t'$ der Index von g_t' in der Obergruppe G ist.

Ist nunmehr G eine Abelsche Gruppe und werden die Substitutionen s von g durch die ϱ Charakterenbedingungen:

$$(10) \qquad \xi_0(s) = 1, \ \xi_1(s) = 1, \ \ldots, \ \xi_{\varrho-1}(s) = 1$$

aus G ausgeschnitten, so erhält man die entsprechenden Bedingungen für die Gruppe $g_t' = g_t \cdot g$, indem man hier nur jene ξ_i beibehält, welche in g_t durchaus 1 werden. Danach ist unmittelbar:

$$(11) \qquad Z(s) = \prod_p \prod_i \left(1 - \frac{\xi_i(Z)}{p^s}\right)^{-1},$$

vorin das innere Produkt jeweils über diejenigen der ϱ Charaktere ξ_i zu rstrecken ist, die in g_t Eins werden.

Sei endlich Ω insbesondere der Körper der a-ten Einheitswurzeln, so darf G mit der Gruppe der $n = \varphi(a)$ primen Restklassen S mod a identifiziert werden. Ist dann $a = p^k \cdot b$ ($b : p$ unteilbar), so besteht g_t aus den $m = \varphi(p^k)$ Klassen mod a mit Zahlen $A \equiv 1 \pmod{b}$, während für Z irgendeine der m Klassen mod a mit Zahlen $A \equiv p \pmod{b}$ zu nehmen ist. Bezüglich der Charaktere $\xi(S) = \xi(A)$ der primen Restklassen S mod a oder der zu a primen Zahlen A ist weiter daran zu erinnern, daß der einzelne Charakter ξ zu einem bestimmten Teiler d von a in dem Sinne „gehört", daß d die kleinste Zahl ist, bei der

$$\xi(A) = 1 \quad \text{für alle} \quad A \equiv 1 \pmod{d} \tag{12}$$

und dann in sofort ersichtlicher Weise für die primen Restklassen mod d einen zum Teiler d gehörenden Charakter χ oder „eigentlichen" Charakter mod d festlegt [2]). Demgemäß mögen die ϱ die Untergruppe g definierenden Charaktere ξ_i zu den Teilern d_i von a gehören und die χ_i die entsprechenden eigentlichen Charaktere mod d_i bezeichnen. Es sind dann diejenigen ξ_i, welche in g_t Eins werden, genau jene, bei denen $b : d_i$ teilbar ist, und für sie gilt:

$$\xi_i(Z) = \xi_i(A) = \chi_i(p), \tag{13}$$

so daß man erhält:

$$Z(s) = \prod_p \prod_i \left(1 - \frac{\chi_i(p)}{p^s}\right)^{-1} \tag{14}$$

das innere Produkt jeweils über diejenigen χ_i erstreckt, für welche $b : d_i$ teilbar ist.

Will man hier die Multiplikationsordnung umkehren, so ist nur zu beachten, daß das einzelne $\chi_i(p)$ für die und nur die Primzahlen p auftritt, bei denen $a = p^k b$, $b : d_i$ teilbar ist, und diese wegen $a : d_i$ teilbar, $: p$ unteilbar gerade mit den nicht in d_i aufgehenden zusammenfallen. Es wird also bei Absonderung des dem Hauptcharakter $\chi_0 = \xi_0 \equiv 1$, $d_0 = 1$ entsprechenden Faktors $\zeta(s)$ und Einführung der L-Reihen:

$$Z(s) = \zeta(s) \prod_{i=1}^{\varrho-1} L(s, \chi_i, d_i). \tag{15}$$

---

[2]) Es ist die Anzahl der zum Teiler d gehörenden Charaktere mod a gleich der Anzahl der eigentlichen Charaktere mod d und gegeben durch:

$$d \prod_i \left(1 - \frac{2}{l_i}\right) \prod_j \left(1 - \frac{1}{l_j}\right)^2,$$

wo l_i die einfachen, l_j die mehrfachen Primteiler von d zu durchlaufen hat.

Der Vergleich[3]) der allgemeinen Heckeschen Funktionalgleichung für $Z(s)$ mit der aus dieser Darstellung folgenden ergibt für die Diskriminante Δ des Körpers ω nach leichter Vorzeichenbestimmung:

$$\Delta = \prod_{i=1}^{g-1} \chi_i(-1)\, d_i. \tag{16}$$

II. Die Klassenzahl des Körpers $K(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \ldots, \sqrt{m_t})$.

Ein quadratischer Körper der Diskriminante Δ ist im Kreiskörper Ω enthalten, sobald $a : \Delta$ teilbar ist, und die Untergruppe g, zu der er gehört, wird aus G durch $\chi = 1$ ausgeschnitten, falls $\chi = \chi(A, \Delta)$ der eigentliche Charakter mod $|\Delta|$ ist, welcher die Primzahlzerlegung im quadratischen Körper regelt[4]).

Der durch t voneinander unabhängige Quadratwurzeln $(\sqrt{m_1}, .., \sqrt{m_t})$ erzeugte Körper K des Grades $n = 2^t$ enthält $n - 1$ quadratische Unterkörper k_i der Diskriminanten Δ_i, die je durch die sämtlichen, mit jenen t Wurzeln zu bildenden Produkte erzeugt werden. Er selbst ist enthalten im Kreiskörper Ω, falls a gemeinsames Vielfaches der Δ_i ist und die n Charaktere χ_i, welche die Untergruppe g, zu der er gehört, aus G ausschneiden, sind gerade die $n - 1$ jenen Diskriminanten Δ_i zugeordneten Charaktere $\chi_i = \chi_i(A, \Delta_i)$ nebst dem Hauptcharakter $\chi_0 \equiv 1$ [5]).

Danach ist Z-Funktion und Diskriminante des Körpers K:

$$Z(s) = \zeta(s) \prod_{i=1}^{n-1} L(s, \chi_i, \Delta_i), \tag{17}$$

$$\Delta = \prod_{i=1}^{n-1} \Delta_i. \tag{18}$$

Für die Primzahlzerlegung in K ist aus (17) leicht zu entnehmen: die in keinem Δ_i aufgehenden Primzahlen p zerfallen in n Primideale ersten oder $\frac{n}{2}$ Primideale zweiten Grades, je nachdem die n Charaktere $\chi_i(p)$

---

[3]) Dieses Prinzip der Verwendung der Funktionalgleichung zur Diskriminantenbestimmung erstmalig bei E. Hecke (Gött. Nachr. 1917).

[4]) Für die Primdiskriminanten $\Delta = -4, +8, -8, (-1)^{\frac{l-1}{2}} l$ bzw. $\chi = (-1)^{\frac{A-1}{2}}$, $(-1)^{\frac{A^2-1}{8}}$, $(-1)^{\frac{A-1}{2}+\frac{A^2-1}{8}}$, $\left(\frac{A}{l}\right)$ und für zusammengesetztes Δ das Produkt der den Primdiskriminanten in Δ entsprechenden Charaktere. (Vgl. Weber, Algebra III.)

[5]) Unter Hinzunahme von $\Delta_0 = 1$, dem $\chi_0 \equiv 1$ entspreche, bilden die Δ_i und die χ_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ zwei untereinander und mit der Gruppe von K isomorphe Gruppen.

le $= +1$ oder zur Hälfte $= +1$ zur Hälfte $= -1$ ausfallen, die rimteiler $l \neq 2$ der Δ_i zerfallen in die Quadrate von $\frac{n}{2}$ Primidealen ersten ler $\frac{n}{4}$ Primidealen zweiten Grades, je nachdem die den $\frac{n}{2}$ durch l unteil- ren Δ_i ($\Delta_0 = 1$ mit $\chi_0 \equiv 1$ hinzu gedacht) entsprechenden $\frac{n}{2}$ Charaktere (l) alle $= +1$ oder zur Hälfte $= +1$ zur Hälfte $= -1$ ausfallen, r Primteiler $l = 2$ endlich zerfällt in entsprechender Weise in lauter veifache oder vierfache Primidealfaktoren, je nachdem in den Diskrimi- nten der t Grundkörper $(\sqrt{m_1}), \ldots, (\sqrt{m_t})$ nur eine oder mehrere der rimdiskriminanten $-4, +8, -8$ vorkommt (je nachdem sind nämlich oder $\frac{n}{4}$ der Δ_i ($\Delta_0 = 1$ hinzugedacht) ungerade.)

Sind die Diskriminanten $\delta_1, \ldots, \delta_t$ der t Grundkörper $(\sqrt{m_1}), \ldots, (\sqrt{m_t})$ lativ prim, so fallen die Δ_i mit den sämtlichen aus ihnen zu bildenden odukten zusammen, wonach:

$$9) \qquad \Delta = \delta^{\frac{n}{2}}, \qquad \delta = \delta_1 . \delta_2 . \ldots . \delta_t$$

ler K sich als unverzweigt über $k(\sqrt{\delta})$ erweist.

Sind $\delta_1, \ldots, \delta_t$ überdies Primdiskriminanten, so ist K der Körper r Geschlechter[6]) von $k(\sqrt{\delta})$.

Durch Gl. (17) wird nunmehr für $s \to 1$ unter Beachtung von Gl. (18) mittelbar die Klassenzahl H von K mit dem Produkt der Klassen- hlen h_i aller $n-1$ quadratischen Unterkörper k_i in Beziehung gesetzt. ierzu ist nur vorweg zu bemerken, daß die Anzahl r der reellen Körper k_i, eren Grundeinheiten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ ($\varepsilon_i > 1$) seien, in den beiden Fällen

$$A) \qquad K \text{ reell:} \qquad r = n - 1,$$

$$B) \qquad K \text{ imaginär:} \qquad r = \frac{n}{2} - 1$$

trägt und beidemal mit der Anzahl der Grundeinheiten $E_1, \ldots, E_r$ on K übereinstimmt, und daß ferner der Grad der in K liegenden, also us Quadratwurzeln zusammensetzbaren, Einheitswurzeln ein Teiler von sein muß[7]). Dann folgt, unter $R(E_i)$ den Regulator der Einheiten erstanden, zunächst:

---

[6]) R. Fueter, Diss. Göttingen 1903. Daselbst der arithmetische Beweis der Un- rzweigtheit desselben. Den Beweis der Unverzweigtheit des Klassenkörpers von $\sqrt{\delta}$) für $\delta < 0$ aus der Funktionalgleichung der Z-Funktion bei E. Hecke, l. c.

[7]) Ein Galoisscher Körper ist dann aus Quadratwurzeln zusammensetzbar, nn für alle Substitutionen desselben $S^2 = 1$ gilt. Der Körper Ω der a-ten Ein- itswurzeln also dann, wenn für alle Primreste mod a: $A^2 \equiv 1 \pmod{a}$ gilt, was nzig für die Teiler a von 24 zutrifft.

$$H = \sigma \frac{\prod_{i=1}^{r} \lg \varepsilon_i \; {}_{n-1}}{R(E_i)} \prod_{i=1}^{r} h_i, \tag{20}$$

wo $\sigma = 2, 1$, je nachdem K die achten Einheitswurzeln, d. h. also $\sqrt{-1}$ und $\sqrt{2}$, enthält oder nicht.

Den hier auftretenden Quotienten noch etwas weiter zu entwickeln, sind die Fälle (A) und (B) eines reellen und imaginären Körpers K zu trennen.

Fall A. Bedeutet hier $N_i(\alpha)$ die Relativnorm einer Zahl α aus K bezüglich k_i, so wird:

$$N_i(E_j) = \pm \varepsilon_i^{\lambda_{ij}} \qquad (i, j = 1, \ldots, r) \tag{21}$$

sein, woraus, die E_j positiv gewählt, folgt

$$E_j^{\frac{n}{2}} = \prod_{i=1}^{r} \varepsilon_i^{\lambda_{ij}} \qquad (j = 1, \ldots, r). \tag{22}$$

Da andererseits aber auch

$$\varepsilon_i = \prod_{j=1}^{r} E_j^{\varkappa_{ji}} \qquad (i = 1, \ldots, r) \tag{23}$$

sein muß, so ergibt sich für die ganzzahligen Absolutbeträge der Determinanten der λ_{ij} und $\varkappa_{ij}$:

$$\lambda = \left|\left|\lambda_{ij}\right|\right|, \qquad \varkappa = \left|\left|\varkappa_{ij}\right|\right|, \qquad \lambda \cdot \varkappa = \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}. \tag{24}$$

Es ist also die Anzahl λ der Verbände, in welche die Einheiten $\varepsilon_1^{\nu_1} \cdot \varepsilon_2^{\nu_2} \cdot \ldots \cdot \varepsilon_r^{\nu_r}$ zerfallen, falls demselben Verband solche zugezählt werden, die durch Multiplikation mit der $\frac{n}{2}$-ten Potenz einer Einheit aus K ineinander überführbar sind, ebenso wie $\varkappa$ eine Potenz von 2.

Nunmehr folgt leicht:

$$R(E_i) = \frac{1}{\varkappa} R(\varepsilon_i), \qquad R(\varepsilon_i) = n^{\frac{n}{2}-1} \prod_{i=1}^{r} \lg \varepsilon_i \tag{25}$$

und damit:

$$H = \frac{2}{\lambda} \left(\frac{n}{4}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^{n-1} h_i. \tag{A}$$

Fall B. Hier bilden zunächst die $r = \frac{n}{2} - 1$ reellen k_i zusammen den Unterkörper k vom Grad $\frac{n}{2}$ aller reellen Zahlen von K und die eben gemachten Feststellungen gelten hier für den Zusammenhang der Einheiten $e_1, \ldots, e_r$ von k mit den Einheiten $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$, so daß

6) $$R_k(e_i) = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{8}{n}\right)^{\frac{n}{4}} \prod_{i=1}^{r} \lg \varepsilon_i ,$$

7) $$R(e_i) = 2^r R_k(e_i)$$

ird. Ist weiter $N_k(\alpha) = \alpha\bar{\alpha}$ die Relativnorm einer Zahl α aus K be-iglich k, so wird:

8) $$N_k(E_j) = \prod_{i=1}^{r} e_i^{\lambda_{ij}^0} \qquad (j = 1, \ldots, r)$$

in, woraus wegen $N_k(E_j) = \vartheta_j E_j^2$ (ϑ_j Einheitswurzel) folgt:

9) $$\vartheta_j E_j^2 = \prod_{i=1}^{r} e_i^{\lambda_{ij}^0} \qquad (j = 1, \ldots, r).$$

Da andererseits aber auch (η_i Einheitswurzel):

0) $$e_i = \eta_i \prod_{j=1}^{r} E_j^{\varkappa_{ji}^0} \qquad (i = 1, \ldots, r),$$

ergibt sich für die ganzzahligen Absolutbeträge der Determinanten der $_j$ und $\varkappa_{ij}^0$:

1) $$\lambda_0 = \left|\left|\lambda_{ij}^0\right|\right|, \qquad \varkappa_0 = \left|\left|\varkappa_{ij}^0\right|\right|, \qquad \lambda_0 \cdot \varkappa_0 = 2^r .$$

Es ist also die Anzahl λ_0 der Verbände, in welche die Einheiten $^1 . e_2^{\nu_2} \ldots . e_r^{\nu_r}$ von k zerfallen, falls demselben Verband solche zugezählt erden, die durch Multiplikation mit der Relativnorm einer Einheit aus ineinander überführbar sind, ebenso wie $\varkappa_0$, eine Potenz von 2.

Da nun

2) $$R(E_i) = \frac{1}{\varkappa_0} R(e_i)$$

t, so folgt

3) $$H = \frac{2\sigma}{\lambda\lambda_0}\left(\frac{n}{8}\right)^{\frac{n}{4}} \prod_{i=1}^{n-1} h_i ,$$

o $\sigma = 2, 1$, je nachdem K die achten Einheitswurzeln, d. h. also $\sqrt{-1}$ nd $\sqrt{2}$ enthält oder nicht.

Walchensee, den 16. September 1921.

(Eingegangen am 17. September 1921.)

Über affine Geometrie. XXXIII: Affinminimalflächen.

Von

Wilhelm Blaschke in Hamburg.

Das einfachste Variationsproblem mit einem Doppelintegral, das gegenüber linearen unhomogenen Substitutionen mit der Determinante Eins der Veränderlichen x_1, x_2, x_3 invariant ist, kann man so ansetzen

$$\Omega = \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 - \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 x_3}{\partial x_2^2} \right\}^{\frac{1}{4}} dx_1 dx_2 = \text{Extrem.}$$

Ich habe dieses Integral die *„Affinoberfläche"* der Fläche $x_3 = x_3(x_1, x_2)$ genannt und die Extremalen des Variationsproblems als *„Affinminimalflächen"* bezeichnet.

Die gewöhnlichen Minimalflächen sind weitaus die anziehendste Familie von Flächen, offenbar deshalb, weil sie die Extremalen des einfachsten bewegungsinvarianten Variationsproblems mit einem Doppelintegral sind. Von diesem Gesichtspunkt aus wird man hoffen dürfen, daß die Affinminimalflächen die nächst interessante Flächenklasse bilden werden und daß es möglich sein wird, zu manchen der merkwürdigen Eigenschaften der Minimalflächen, die von Monge, Riemann, Weierstraß, H. A. Schwarz und andern Geometern entdeckt worden sind, bei den Affinminimalflächen ein Gegenstück aufzufinden.

In der Tat! Diese Analogie läßt sich in erstaunlich weitgehender Weise durchführen. Zunächst ist man natürlich schon von anderen Gesichtspunkten aus auf unsre Flächenklasse gestoßen. So hat G. Darboux gezeigt, wie man alle Affinminimalflächen durch Quadraturen bestimmen kann, und damit ist das Gegenstück der Integrationstheorie von Monge erledigt.

H. A. Schwarz hat gefunden, wie man das „Problem von Björling" löst, eine Minimalfläche durch einen gegebenen Streifen hindurchzulegen.

ier möchte ich nun zeigen: *Das dem Problem von Björling entsprechende andwertproblem für Affinminimalflächen läßt sich in einer dem Verhren von H. A. Schwarz nachgebildeten Weise ebenso einfach lösen.* a die Differentialgleichung der Affinminimalflächen nicht linear und von er vierten Ordnung ist, erscheint mir dieses Ergebnis bemerkenswert zu in. Nebenbei wird sich für die Affinoberfläche einer Affinminimalfläche n Ausdruck durch ein Randintegral ergeben, der einer Formel von iemann und Schwarz entspricht.

Die Übertragung der Untersuchungen von Schwarz über das Problem on Plateau bleibt einer späteren Arbeit vorbehalten. Bedauerlich ist ır, daß es zur einfachen physikalischen Verwirklichung der Minimalflächen ırch Flüssigkeitshäutchen anscheinend bei den Affinminimalflächen nichts ntsprechendes gibt, aber nach berühmten Mustern kann man auch sagen ım so schlimmer für die Physik!"

Vielleicht darf man hoffen, daß solche Sonderuntersuchungen der „Affinometrie" einen Beitrag liefern zu Fragen von (wie mir scheint) recht lgemeiner Wichtigkeit, nämlich zur Untersuchung der Variationsprobleme it Invarianzeigenschaften gegenüber gewissen Transformationsgruppen. iese Fragen spielen auch in der Relativitätstheorie, besonders nach ilberts Untersuchungen, eine beherrschende Rolle.

Ich möchte diese Einleitung mit der beruhigenden Versicherung hließen, daß die Kenntnis des überlangen Bandwurms der vorhergehenden itteilungen über Affingeometrie in den Leipziger Berichten (1916—1919) nd der Mathematischen Zeitschrift (1920—1921) im folgenden durchıs nicht vorausgesetzt wird.

§ 1.

Formeln aus der affinen Flächentheorie.

Zunächst soll aus der affinen Flächentheorie soviel zusammengestellt erden, wie wir für unsere besonderen Ziele brauchen. Die Flächen wollen ir, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, als regulär analysch, reell und hyperbolisch gekrümmt annehmen und zur Parameterdarellung die Asymptotenlinien verwenden. Wir setzen also $x_k = x_k(u, v)$ nd fassen diese Gleichungen vektoriell in eine zusammen

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v). \tag{1}$$

ann drückt sich die Voraussetzung, daß die Asymptotenlinien Parameterıien sind, durch die Annahme

$$\mathfrak{L} = (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{uu}) = 0, \qquad \mathfrak{N} = (\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{vv}) = 0 \tag{2}$$

aus, wenn z. B.

$$(3)\qquad (\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{x}_{uu}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial^2 x_2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial v} & \frac{\partial^2 x_3}{\partial u^2} \end{vmatrix}$$

bedeutet. Wir wollen ferner die Parameter u, v so wählen, daß die Determinante

$$(4)\qquad \mathfrak{M} = (\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{x}_{uv}) = \mathfrak{F}^2, \quad \mathfrak{F} > 0$$

positiv ausfällt. Wir führen überdies die Abkürzungen ein:

$$(5)\qquad \begin{aligned} \frac{(\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{x}_{uuu})}{\mathfrak{F}} &= \frac{(\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_{uu}\,\mathfrak{x}_{uv})}{\mathfrak{F}} = \mathfrak{A}, \\ \frac{(\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{x}_{vvv})}{\mathfrak{F}} &= \frac{(\mathfrak{x}_v\,\mathfrak{x}_{uv}\,\mathfrak{x}_{vv})}{\mathfrak{F}} = \mathfrak{D} \end{aligned}$$

und bemerken, daß

$$(6)\qquad \varphi = 2\,\mathfrak{F}\,du\,dv,$$

$$(7)\qquad \psi = \mathfrak{A}\,du^3 + \mathfrak{D}\,dv^3$$

zwei invariante Differentialformen unsrer Fläche und

$$(8)\qquad \mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{A}\mathfrak{D}}{\mathfrak{F}^3}$$

die einfachste Differentialinvariante gegenüber inhaltstreuen affinen Transformationen ist[1]). Für die Ableitungen des Vektors $\mathfrak{x}$ findet man

$$(9)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{x}_{uu} &= \frac{\mathfrak{F}_u}{\mathfrak{F}}\mathfrak{x}_u + \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{F}}\mathfrak{x}_v, \\ \mathfrak{x}_{uv} &= \mathfrak{F}\,\xi, \\ \mathfrak{x}_{vv} &= \frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{F}}\mathfrak{x}_u + \frac{\mathfrak{F}_v}{\mathfrak{F}}\mathfrak{x}_v, \end{aligned}$$

wobei ξ einen mit der Fläche kovariant verknüpften Vektor bedeutet, den ich *„den Vektor der Affinnormalen"* zu nennen pflege. Setzt man

$$(10)\qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{S} - \mathfrak{J},$$

wo

$$(11)\qquad \mathfrak{S} = -\frac{1}{\mathfrak{F}}\frac{\partial^2 \log \mathfrak{F}}{\partial u\,\partial v}$$

[1]) Näheres über diese und die folgenden Formeln der affinen Flächentheorie in den Arbeiten IV, XII und XVI von G. Pick, dem Verfasser und J. Radon in den Leipziger Berichten **69** (1917) und **70** (1918).

s Gaußsche Krümmungsmaß der quadratischen Differentialform φ be-utet, so folgen aus (9) die Integrabilitätsbedingungen

$$\mathfrak{H}_u = \frac{\mathfrak{A}\,\mathfrak{D}_u}{\mathfrak{F}^3} - \frac{1}{\mathfrak{F}}\left(\frac{\mathfrak{A}_v}{\mathfrak{F}}\right)_v,$$

2)

$$\mathfrak{H}_v = \frac{\mathfrak{D}\,\mathfrak{A}_v}{\mathfrak{F}^3} - \frac{1}{\mathfrak{F}}\left(\frac{\mathfrak{D}_u}{\mathfrak{F}}\right)_u.$$

chließlich finden sich für den Vektor der Affinnormalen ξ noch die Ab-itungsgleichungen

$$\xi_u = -\mathfrak{H}\,\mathfrak{x}_u + \frac{\mathfrak{A}_v}{\mathfrak{F}^2}\,\mathfrak{x}_v,$$

3)

$$\xi_v = +\frac{\mathfrak{D}_u}{\mathfrak{F}^2}\,\mathfrak{x}_u - \mathfrak{H}\,\mathfrak{x}_v.$$

amit sind die Grundformeln der affinen Flächentheorie für unsre be-ndre Parameterwahl erschöpft.

§ 2.

Die erste Variation der Affinoberfläche.

Als Gegenstück zur Oberfläche führen wir das von der Parameter-rstellung unabhängige gegenüber inhaltstreuen Affinitäten invariante tegral

4) $$\Omega = \int\int (\mathfrak{M}^2 - \mathfrak{L}\mathfrak{N})^{\frac{1}{4}}\, du\, dv$$

n, wo die Bedeutung der Determinanten $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ in (2) und (4) ent-lten ist. Bei unsern besondern Parametern vereinfacht sich diese „Affin-erfläche“ Ω nach (2), (4) zu

5) $$\Omega = \int\int \mathfrak{F}\, du\, dv.$$

Wir gehen nun von unsrer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ zu einer Nachbarfläche $u, v)$ durch eine Verrückung $\delta\mathfrak{x}$ über:

6) $$\bar{\mathfrak{x}}(u, v) = \mathfrak{x} + x\mathfrak{x}_u + y\mathfrak{x}_v + z\xi = \mathfrak{x} + \delta\mathfrak{x}.$$

ie Verrückungskomponenten x, y, z sollen die Gestalt haben

7) $$x = \varepsilon\,\bar{x}(u, v), \qquad y = \varepsilon\,\bar{y}(u, v), \qquad z = \varepsilon\,\bar{z}(u, v),$$

$\varepsilon \to 0$ geht. Aus (4) und (9) folgt

8) $$(\mathfrak{x}_u\,\mathfrak{x}_v\,\xi) = \mathfrak{F},$$

d somit berechnen sich die Verrückungskomponenten x, y, z aus dem errückungsvektor $\delta\mathfrak{x}$ nach den Formeln

$$\mathfrak{F}x = (\delta\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_v, \xi),$$

9) $$\mathfrak{F}y = (\mathfrak{x}_u, \delta\mathfrak{x}, \xi),$$

$$\mathfrak{F}z = (\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \delta\mathfrak{x}).$$

Um nun die Affinoberfläche von $\bar{\mathfrak{x}}(u, v)$ zu berechnen, haben wir

$$\bar{\Omega} = \int\int (\overline{\mathfrak{M}}^2 - \bar{\mathfrak{L}}\,\bar{\mathfrak{N}})^{\frac{1}{4}}\, du\, dv, \tag{20}$$

zu ermitteln. Wir wollen $\bar{\Omega}$ nach Potenzen von ε entwickeln und das in ε lineare Glied wie üblich mit $\delta\Omega$ bezeichnen. Da nach (2) $\mathfrak{L} = \mathfrak{N} = 0$ ist, wird $\bar{\mathfrak{L}}\,\bar{\mathfrak{N}}$ in ε quadratisch sein und kann vernachlässigt werden, wenn wir nur höchstens lineare Glieder berücksichtigen. Dann ist also

$$\bar{\Omega} = \int\int \overline{\mathfrak{M}}^{\frac{1}{4}}\, du\, dv, \tag{21}$$

und wir brauchen nur die Determinante $\overline{\mathfrak{M}}$ auszuwerten.

Mittels der Ableitungsformeln (9), (13) folgt aus (16)

$$\begin{aligned}
\bar{\mathfrak{x}}_u &= \mathfrak{x}_u + \left\{\frac{(\mathfrak{F}x)_u}{\mathfrak{F}} - \mathfrak{H}z\right\}\mathfrak{x}_u + \{*\}\,\mathfrak{x}_v + \{z_u + \mathfrak{F}y\}\,\xi,\\
\bar{\mathfrak{x}}_v &= \mathfrak{x}_v + \{*\}\,\mathfrak{x}_u + \left\{\frac{(\mathfrak{F}y)_v}{\mathfrak{F}} - \mathfrak{H}z\right\}\mathfrak{x}_v + \{z_v + \mathfrak{F}x\}\,\xi,\\
\bar{\mathfrak{x}}_{uv} &= \mathfrak{x}_{uv} + \{*\}\,\mathfrak{x}_u + \{*\}\,\mathfrak{x}_v + \{(\mathfrak{F}x)_u + (\mathfrak{F}y)_v + z_{uv} - \mathfrak{F}\mathfrak{H}z\}\,\xi.
\end{aligned} \tag{22}$$

Darin sind die durch Sterne angedeuteten Glieder linear in ε. Wir finden jetzt für die Determinante

$$(\bar{\mathfrak{x}}_{uv}\,\bar{\mathfrak{x}}_u\,\bar{\mathfrak{x}}_v) = \overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{F}\{\mathfrak{F} + 2(\mathfrak{F}x)_u + 2(\mathfrak{F}y)_v + z_{uv} - 3\mathfrak{F}\mathfrak{H}z\}, \tag{23}$$

bis auf Glieder, die mindestens quadratisch in ε sind. Durch Wurzelausziehen folgt

$$\overline{\mathfrak{M}}^{\frac{1}{4}} = \mathfrak{F} + (\mathfrak{F}x)_u + (\mathfrak{F}y)_v + \frac{1}{2}z_{uv} - \frac{3}{2}\mathfrak{F}\mathfrak{H}z \tag{24}$$

und somit

$$\delta\Omega = \int\int \left\{(\mathfrak{F}x)_u + (\mathfrak{F}y)_v + \frac{1}{2}z_{uv}\right\} du\, dv - \frac{3}{2}\int \mathfrak{H}z \cdot d\Omega, \tag{25}$$

wenn

$$\mathfrak{F}\, du\, dv = d\Omega \tag{26}$$

gesetzt wird. Das erste Integral kann man in ein Randintegral umrechnen:

$$\begin{aligned}
&\int\int \{(\mathfrak{F}x)_u + (\mathfrak{F}y)_v + \tfrac{1}{2}z_{uv}\}\, du\, dv\\
&= \oint (\mathfrak{F}x\, dv - \mathfrak{F}y\, du) - \tfrac{1}{4}\oint (z_u\, du - z_v\, dv).
\end{aligned} \tag{27}$$

Wegen (19) kann man auch schreiben

$$\oint (\delta\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_v\, dv, \xi) + (\delta\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u\, du, \xi) = \oint (\delta\mathfrak{x}, d\mathfrak{x}, \xi), \tag{28}$$

wenn $d\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_u du + \mathfrak{x}_v dv$ das vektorielle Linienelement des Randes bedeutet.

Damit haben wir schließlich für die erste Variation der Affinoberfläche die folgende einfache Formel

$$\boxed{\delta\Omega = \oint (\delta\mathfrak{x}, d\mathfrak{x}, \xi) - \tfrac{3}{2}\int \mathfrak{H}z\, d\Omega - \tfrac{1}{4}\oint (z_u\, du - z_v\, dv)} \tag{29}$$

ler

$$0) \quad \delta\Omega = \oint (\delta\mathfrak{x}, d\mathfrak{x}, \xi) - \frac{3}{2}\int\int (\delta\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v)\mathfrak{H}\, du\, dv + \frac{1}{4}\oint \frac{\partial z}{\partial \nu}\, d\sigma,$$

enn zur Abkürzung

$$\frac{-z_u\, du + z_v\, dv}{|\mathfrak{F}\, du\, dv|^{\frac{1}{2}}} = \frac{\partial z}{\partial \nu} \quad \text{und} \quad |\mathfrak{F}\, du\, dv|^{\frac{1}{2}} = d\sigma$$

esetzt wird. Die Formeln (29) und (30) bilden das affine Gegenstück i einer Formel von Gauß (1829) für die Variation der Oberfläche[2]). ür das Randintegral ist noch eine naheliegende Vorzeichenregel festzu-tzen.

§ 3.

Gegenstück zu einer Formel von Riemann und Schwarz.

Die Formel (29) lehrt, daß $\delta\Omega$ bei festgehaltenem Rand (d. h. genauer, enn z, z_u und z_v auf dem Rande Null sind) nur dann für beliebiges z erschwindet, wenn $\mathfrak{H}$, das affine Gegenstück zur mittleren Krümmung uf unserer Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$, gleich Null ist. *Die Extremalen unseres ariationsproblems $\delta\Omega = 0$, die wir Affinminimalflächen nennen, sind lso durch das identische Verschwinden der Invariante $\mathfrak{H}$, der „mittleren Affinkrümmung" gekennzeichnet.*

Betrachten wir jetzt eine Schar ähnlicher und bezüglich des Ursprungs hnlich gelegener Stücke von Affinminimalflächen:

$$31) \qquad \mathfrak{x}^*(u, v; \lambda) = \lambda\mathfrak{x}(u, v), \qquad 0 < \lambda \leqq 1.$$

araus folgt in leicht verständlicher Schreibweise wegen (4) und (9)

$$32) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{M}^* &= \lambda^3 \mathfrak{M}, \\ \mathfrak{F}^* &= \lambda^{\frac{8}{2}} \mathfrak{F}, \\ \xi^* &= \lambda^{-\frac{1}{2}} \xi. \end{aligned}$$

ie Formel (29) gibt daher wegen $\mathfrak{H} = 0$

$$\delta\Omega^* = \lambda^{\frac{1}{2}}\delta\lambda \oint (\mathfrak{x}, d\mathfrak{x}, \xi) - \tfrac{1}{4}\oint (z_u\, du - z_v\, dv).$$

Nun ist nach (19) und (32)

$$z = \frac{(\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{x})}{\mathfrak{F}}\, \lambda^{\frac{1}{2}}\delta\lambda$$

nd daraus folgt durch Ableitung mittels (9)

$$z_u\, du - z_v\, dv = (\mathfrak{x}, d\mathfrak{x}, \xi)\lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \delta\lambda.$$

---

[2]) Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii, Werke 5, . 29 — 77, bes. S. 65.

Somit ist in unserm Fall

$$\delta\Omega^* = \tfrac{3}{4}(\lambda^{\frac{1}{3}}\delta\lambda)\oint(\mathfrak{x}, d\mathfrak{x}, \xi) \tag{33}$$

und durch Integration nach λ zwischen den Grenzen 0, 1 wegen $\Omega(0) = 0$

$$\Omega = \tfrac{1}{2}\oint(\mathfrak{x}, d\mathfrak{x}, \xi).$$

Die Affinoberfläche eines Stücks einer Affinminimalfläche läßt sich somit durch das Randintegral darstellen

$$\boxed{\Omega = \tfrac{1}{2}\oint(\mathfrak{x}, d\mathfrak{x}, \xi)}. \tag{34}$$

Die entsprechende Formel für die Minimalflächen hat H. A. Schwarz 1874 angegeben[3]).

Da Ω von der Wahl des Ursprungs nicht abhängt, folgt aus (34)

$$2\Omega = \oint(\mathfrak{x} + \mathfrak{v}, d\mathfrak{x}, \xi) = 2\Omega + \oint(\mathfrak{v}, d\mathfrak{x}, \xi)$$

oder

$$\oint(\mathfrak{v}, d\mathfrak{x}, \xi) = 0, \tag{35}$$

wenn $\mathfrak{v}$ einen beliebigen, bei der Integration festgehaltenen Vektor bedeutet. Bezeichnen wir den Vektor mit den Komponenten

$$\begin{aligned} &\xi_2\, dx_3 - \xi_3\, dx_2, \\ &\xi_3\, dx_1 - \xi_1\, dx_3, \\ &\xi_1\, dx_2 - \xi_2\, dx_1 \end{aligned} \tag{36}$$

als „*Vektorprodukt*“ $\xi \times d\mathfrak{x}$, so können wir unser Ergebnis auch so fassen: *Auf einer Affinminimalfläche ist*

$$\int \xi \times d\mathfrak{x} \tag{37}$$

vom Weg unabhängig.

Man kann etwa aus (29) einsehen, daß diese Tatsache für die Affinminimalflächen kennzeichnend ist. Unterwirft man nämlich eine Fläche einer Schiebung (= Parallelverschiebung) $\delta\mathfrak{x} = \text{konst.}$, so ist $\delta\Omega = 0$ und aus

$$\oint \xi \times d\mathfrak{x} = 0 \tag{38}$$

folgt das Verschwinden des ersten Randintegrals in (29). Wenn aber $\delta\mathfrak{x}$ konstant ist, so haben wir nach (19) und (9)

$$-\int(z_u\, du - z_v\, dv) = \int(\xi, d\mathfrak{x}, \delta\mathfrak{x}),$$

also verschwindet wegen (38) auch das zweite Randintegral in (29). Somit muß auch das Flächenintegral Null sein und, da der Rand beliebig zusammengezogen werden kann, folgt $\mathfrak{H} = 0$, wie behauptet war.

[3]) Ges. Math. Abhandlungen 1 (1890), S. 178.

Wegen

$$d(\xi \times \mathfrak{x}) = (d\xi \times \mathfrak{x}) + (\xi \times d\mathfrak{x}) \tag{39}$$

nd die Bedingungen

$$\oint d\xi \times \mathfrak{x} = 0, \quad \oint \xi \times d\mathfrak{x} = 0 \tag{40}$$

eichwertig. Die Formeln haben eine einfache *mechanische Deutung*: enkt man sich in der Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ Spannungen wirksam, und zwar uf das Linienelement $d\mathfrak{x}$ die Spannung $d\xi$, so sagen die Formeln

$$\oint d\xi = 0, \quad \oint \mathfrak{x} \times d\xi = 0 \tag{41}$$

us, daß Gleichgewicht herrscht.

Trägt man alle Vektoren $\xi(u, v)$ vom Ursprung ab, so beschreibt er Endpunkt (im allgemeinen) eine Fläche $\xi(u, v)$, die ich das „Krümmungsbild" der „Urfläche" $\mathfrak{x}(u, v)$ zu nennen pflege. Denkt man sich e Fläche $\xi(u, v)$ ebenfalls in einem Spannungszustand, und zwar so, aß dem Linienelement $d\xi$ der Spannungsvektor $d\mathfrak{x}$ entspricht, so herrscht egen

$$\oint d\mathfrak{x} = 0, \quad \oint \xi \times d\mathfrak{x} = 0 \tag{42}$$

ieder Gleichgewicht. Jede der Flächen $\mathfrak{x}(u, v)$, $\xi(u, v)$, die nach (13) entsprechenden Punkten parallele Tangentenebenen haben, läßt sich als eziproker Kräfteplan zu den Spannungen in der anderen auffassen[4]).

§ 4.

Formeln von Lelieuvre.

Um die Differentialgleichung $\mathfrak{H} = 0$ der Affinminimalflächen zu integrieren, wollen wir zunächst das Krümmungsbild $\xi(u, v)$ einer beliebigen läche $\mathfrak{x}(u, v)$ in Ebenenkoordinaten darstellen. Wir werden das innere der skalare Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{a}$, ξ so abkürzen

$$a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 = \mathfrak{a}\xi \tag{43}$$

nd können dann die Gleichung der Tangentenebene an das Krümmungsld in der Form schreiben

$$\mathfrak{a}\xi = 1, \tag{44}$$

enn die ξ_k für den Augenblick laufende Punktkoordinaten bedeuten. ach (13) läuft die Tangentenebene des Krümmungsbildes zur entrechenden der Urfläche parallel, wir haben also

$$\mathfrak{a} = \lambda(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v). \tag{45}$$

[4]) Vgl. W. Blaschke, Reziproke Kräftepläne zu den Spannungen in einer biegnen Haut, Cambridge Congress Proceedings 2 (1913), S. 291—294.

Nach (18) ist aber

$$\mathfrak{a}\,\xi = \lambda(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)\,\xi = \lambda(\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \xi) = \lambda \mathfrak{F} \tag{46}$$

und somit ist nach (44) $\lambda \mathfrak{F} = 1$ oder

$$\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v}{\mathfrak{F}}. \tag{47}$$

Durch Ableitung folgt daraus wegen (9)

$$\mathfrak{a}_u = \mathfrak{x}_u \times \xi, \qquad \mathfrak{a}_v = \xi \times \mathfrak{x}_v \tag{48}$$

und durch nochmalige Ableitung

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{uu} &= +\frac{\mathfrak{F}_u}{\mathfrak{F}}\mathfrak{a}_u - \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{F}}\mathfrak{a}_v + \frac{\mathfrak{A}_v}{\mathfrak{F}}\mathfrak{a}, \\ \mathfrak{a}_{uv} &= \quad * \quad\quad * \quad - \mathfrak{F}\mathfrak{H}\mathfrak{a}, \\ \mathfrak{a}_{vv} &= -\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{F}}\mathfrak{a}_u + \frac{\mathfrak{F}_v}{\mathfrak{F}}\mathfrak{a}_v + \frac{\mathfrak{D}_u}{\mathfrak{F}}\mathfrak{a}. \end{aligned} \tag{49}$$

Aus (48) und (18) ergibt sich folgende Tabelle innerer Produkte

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{x}_u\mathfrak{a} = 0, & \mathfrak{x}_u\mathfrak{a}_u = 0, & \mathfrak{x}_u\mathfrak{a}_v = -\mathfrak{F}, \\ \mathfrak{x}_v\mathfrak{a} = 0, & \mathfrak{x}_v\mathfrak{a}_u = -\mathfrak{F}, & \mathfrak{x}_v\mathfrak{a}_v = 0, \\ \xi\mathfrak{a} = 1, & \xi\mathfrak{a}_u = 0, & \xi\mathfrak{a}_v = 0 \end{array} \tag{50}$$

und der Multiplikationssatz der Determinanten liefert uns somit

$$(\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \xi)(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{a}_v) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\mathfrak{F} \\ 0 & -\mathfrak{F} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\mathfrak{F}^3 \tag{51}$$

oder nach (18)

$$(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_u\,\mathfrak{a}_v) = -\mathfrak{F}. \tag{52}$$

Aus den drei Gleichungen der ersten Zeile von (50) und aus den drei Gleichungen der zweiten Zeile von (50) folgt wegen (52) das Formelpaar

$$\mathfrak{x}_u = \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}_u, \qquad \mathfrak{x}_v = \mathfrak{a}_v \times \mathfrak{a}. \tag{53}$$

Ebenso folgt aus der dritten Zeile von (50)

$$\xi = -\frac{\mathfrak{a}_u \times \mathfrak{a}_v}{\mathfrak{F}}. \tag{54}$$

Nach (53) ist

$$\mathfrak{x} = \int \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}_u\, du + \mathfrak{a}_v \times \mathfrak{a}\, dv. \tag{55}$$

Dabei ist die Integrabilitätsbedingung

$$(\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}_u)_v = (\mathfrak{a}_v \times \mathfrak{a})_u \tag{56}$$

er

7) $$\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}_{uv} = 0$$

füllt nach der mittleren Formel (49).

Gehen wir nun umgekehrt von einem Vektor $\mathfrak{a}(u, v)$ aus, der den dingungen (57) und

8) $$(\mathfrak{a}\, \mathfrak{a}_u\, \mathfrak{a}_v) \neq 0$$

nügt, so ergibt die Formel (55) eine Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$, die auf ihre Asymptolinien bezogen ist und deren Krümmungsbild in Ebenenkoordinaten rch (44) dargestellt wird. Es genügt dazu unsere Schlußweise rückrts durchzugehen. Im übrigen sind unsere Formeln dieselben, die von Lelieuvre 1888 angegeben worden sind[5]), und die in der Affingeotrie ihren naturgemäßen Platz finden.

Wenden wir jetzt die Formeln Lelieuvres auf unsere Aufgabe an, Affinminimalflächen zu bestimmen! Aus der mittleren Formel (49) gt für $\mathfrak{H} = 0$

9) $$\mathfrak{a}_{uv} = 0,$$

0) $$\mathfrak{a} = \mathfrak{u}(u) + \mathfrak{v}(v).$$

mit erhalten wir für die Affinminimalflächen nach (55) die Integralrstellung

1) $$\boxed{\mathfrak{x} = \mathfrak{v} \times \mathfrak{u} + \int \mathfrak{u} \times d\mathfrak{u} - \int \mathfrak{v} \times d\mathfrak{v}}.$$

ir (vgl. (52), (58))

2) $$-\mathfrak{F} = (\mathfrak{u} + \mathfrak{v}, \mathfrak{u}', \mathfrak{v}') \neq 0$$

ot diese Formel stets eine Affinminimalfläche.

Die Darstellung (61) unserer Flächen stammt von G. Darboux, der n einer andern Seite her zu ihnen gekommen ist[6]).

---

[5]) A. Lelieuvre, Sur les lignes asymptotiques ..., Bulletin des Sciences mathétiques **12** (1888), S. 126 oder G. Darboux, Théorie des surfaces **4** (1896), S. 24.

[6]) G. Darboux, Théorie des surfaces **3** (1894), S. 368; **4** (1896), S. 512. Es ist, e schon E. Goursat gezeigt hat, leicht, aus (61) alle Integralzeichen zu entfernen d die Affinminimalflächen integrallos darzustellen. Bulletin société mathématique ance **24** (1896), S. 46. Mehrfach sind unsere Flächen zunächst unter dem Namen *araboloidische Flächen*" von P. Franck studiert worden, vgl. Jahresbericht der Math. Ver. **23** (1914), S. 49–53, S. 343–352; **29** (1920), S. 75–93. Daß die finminimalflächen mit den paraboloidischen Flächen zusammenfallen, hat zuerst Berwald bemerkt, Math. Zeitschr. **8** (1920), S. 63–78. Zu (62) sei erwähnt, daß nur dann identisch verschwindet, wenn die Kurven $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ in derselben Ebene durch n Ursprung liegen.

§ 5.

Gegenstück zum Problem von Björling.

Mittels des in § 4 eingeführten kontravarianten Vektors $\mathfrak{a}$ wollen wir jetzt das auf einer Affinminimalfläche vom Wege unabhängige Integral (38) ausdrücken. Es ist nach (54), (55)

$$(63) \qquad \xi \times d\mathfrak{x} = -\frac{1}{\mathfrak{F}}\{(\mathfrak{a}_u \times \mathfrak{a}_v) \times [(\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}_u)\,du - (\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}_v)\,dv]\}.$$

Beachtet man die Rechenregel

$$(64) \qquad (\mathfrak{v}_1 \times \mathfrak{v}_2) \times (\mathfrak{v}_3 \times \mathfrak{v}_4) = (\mathfrak{v}_1 \mathfrak{v}_3 \mathfrak{v}_4)\,\mathfrak{v}_2 - (\mathfrak{v}_2 \mathfrak{v}_3 \mathfrak{v}_4)\,\mathfrak{v}_1$$

für Vektorprodukte und die Beziehung (52), so ergibt sich

$$(65) \qquad \xi \times d\mathfrak{x} = -\mathfrak{a}_u\,du + \mathfrak{a}_v\,dv.$$

Insbesondere für (60) $\mathfrak{a} = \mathfrak{u} + \mathfrak{v}$

$$(66) \qquad \int \xi \times d\mathfrak{x} = -\mathfrak{u} + \mathfrak{v}$$

bis auf unwesentliche Integrationskonstanten. Wegen (60) ist somit

$$(67) \qquad \boxed{\begin{aligned} 2\mathfrak{u} &= \mathfrak{a} - \int \xi \times d\mathfrak{x} \\ 2\mathfrak{v} &= \mathfrak{a} + \int \xi \times d\mathfrak{x} \end{aligned}}$$

Es ist das ein Gegenstück zu einem System von Formeln für Minimalflächen, das H. A. Schwarz 1874 gefunden hat[7]).

Legen wir nun folgendes Randwertproblem vor:

Längs einer Kurve $\mathfrak{x}(t)$ sei ein Vektor $\xi(t)$ gegeben, und zwar sei

$$(68) \qquad (\xi\,\mathfrak{x}'\,\xi') \neq 0. \qquad \left(\mathfrak{x}' = \frac{d\mathfrak{x}}{dt},\ \xi' = \frac{d\xi}{dt}\right)$$

Man soll durch diese Kurve eine Affinminimalfläche hindurch legen, die die ξ zu Affinnormalvektoren hat (§ 1).

Es entspricht das der Aufgabe Björlings (1844), durch eine Kurve eine Minimalfläche zu legen, wenn längs der Kurve noch die Flächennormalen vorgeschrieben sind. Wie Schwarz diese Aufgabe mittels seiner Formeln gelöst hat, so ist die Lösung unserer Aufgabe in den Formeln (67) enthalten. Zunächst können wir uns nämlich längs unserer Kurve $\mathfrak{x}(t)$ den Vektor $\mathfrak{a}$ ermitteln, denn nach (50) steht $\mathfrak{a}$ auf der Tangentenebene an $\mathfrak{x}(u, v)$ und auf der an $\xi(u, v)$ und somit auf $\mathfrak{x}'$ und ξ' senk-

[7]) H. A. Schwarz, Miscellen aus dem Gebiet der Minimalflächen, Crelles Journal **80** (1875), S. 280–300, bes. S. 291 oder H. A. Schwarz, Abhandlungen **1** (1890), S. 179.

cht. Beachten wir noch die Normierung (44), so folgt

9) $$\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{x}' \times \xi'}{(\xi\, \mathfrak{x}'\, \xi')}.$$

ir können uns also durch Integration längs der Kurve $\mathfrak{x}(t)$ nach (67) e Vektoren $\mathfrak{u}(t)$, $\mathfrak{v}(t)$ berechnen und dann, falls (62) erfüllt ist, nach 1) die Affinminimalfläche ermitteln, die die Randbedingungen erfüllt.

Eine eingehendere Besprechung unserer Randwertaufgabe und der bei auftretenden Ausnahmefälle sei einer anderen Gelegenheit vorbe-lten[8]). Es werde nur noch erwähnt, daß die Formeln (67) unmittelbar r Lösung der Aufgabe führen: *Die Affinminimalflächen zu bestimmen e gleichzeitig Drehflächen sind.*

Der hier vorgetragenen Theorie der Affinminimalflächen lassen sich nliche Untersuchungen in der projektiven Geometrie und auch in der versionsgeometrie an die Seite stellen. In der projektiven Geometrie ndelt es sich um die Flächen, die das schon von G. Pick betrachtete variante Integral, das sich in affinen Invarianten so ausdrückt:

$$\int \mathfrak{H} \cdot d\Omega,$$

einem Extrem machen und in der Inversionsgeometrie hat man von r Integralinvariante auszugehen, die sich in Bewegungsinvarianten so hreibt:

$$\int \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^2 \cdot dO.$$

abei bedeuten R_1, R_2 die Hauptkrümmungshalbmesser und dO das ement der Oberfläche.

Hamburg, Mathematisches Seminar, Pfingsten 1921.

---

[8]) W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, 2. Band, soll 1922 bei Springer in Berlin erscheinen.

(Eingegangen am 8. August 1921.)

Über die Integralgleichung der kinetischen Gastheorie.

Von

E. Hecke in Hamburg.

In seiner Arbeit „Begründung der kinetischen Gastheorie“ hat Herr Hilbert[1]) gezeigt, daß die Grundlage der kinetischen Gastheorie eine lineare Integralgleichung 2. Art mit symmetrischem Kern bildet. Auf diese führte er nämlich die von Maxwell-Boltzmann aufgestellte quadratische Funktionalgleichung zurück. Einer näheren Untersuchung der Hilbertschen Gleichung zu dem Zweck, weitergehende Aussagen über die noch unbekannten Wärmeleitungs- und Reibungsglieder zu machen, stellten sich zunächst erhebliche Schwierigkeiten entgegen, indem nämlich der Kern der Integralgleichung im Unendlichen eine derartig komplizierte Singularität besitzt, daß er *quadratisch nicht mehr integrierbar ist*, also die Anwendbarkeit der klassischen Theorie auf die Hilbertsche Gleichung nicht gesichert ist. Es zeigte sich mir nun, daß zur Entscheidung dieser Frage die Entwicklung des Kernes nach Kugelfunktionen einer Variablen herangezogen werden muß, und daß überhaupt die hierbei auftretenden „Fourierkoeffizienten“ für die Auflösung der Gasgleichung eine besondere Bedeutung haben. Diese Koeffizienten, welche nur noch von zwei Variablen abhängen, setze man nämlich als Kerne von Integralgleichungen in einer Variablen an; Wärmeleitungs- und Reibungsglieder, wie auch alle folgenden Näherungsglieder der Maxwellschen Funktion F bestimmen sich dann als Lösungen je einer solchen linearen (symmetrischen) Integralgleichung in *einer Variablen*, deren rechte Seite eine bekannte, d. h. durch die vorangehenden Näherungen völlig bestimmte Funktion ist. Diese Kerne sind überdies noch so beschaffen, daß jede solche Integralgleichung nur eine andere Schreibweise für eine *gewöhnliche lineare Differentialgleichung* (vierter und höherer Ordnung) ist.

[1]) Math. Ann. 72 (1912), sowie auch Hilbert, Grundzüge der Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig 1912. Kap. XXII.

Im § 1 beweise ich zunächst, daß die Fredholm-Hilbertsche Theorie er Integralgleichungen auf die vorliegende Gleichung in der Tat noch nwendbar ist: *Der fünffach iterierte Kern ist nämlich quadratisch integrierbar.* Im § 2 gelingt dann auf unerwartet einfachem Wege der Nachweis, daß der *Kern sogar positiv definit* ist und der kleinste Eigenwert leich 1 ist. Damit ist im Prinzip die Anwendbarkeit des Neumannchen Iterationsverfahrens zur Auflösung der Gleichung erwiesen. Infolge er besonderen Natur der rechten Seiten der Gleichung läßt sich aber och eine weitere Vereinfachung erzielen; es gelingt nämlich die Reduktion auf Integralgleichungen in *einer* Variablen bzw. *gewöhnliche* lineare *Differentialgleichungen* (§ 3). Endlich setze ich in § 4 eine sehr schöne, on Herrn Enskog herrührende Methode zur Behandlung von linearen ntegralgleichungen auseinander.

Die im § 1 erforderlichen komplizierten Rechnungen unterdrücke ich ier; diese sowie auch die Anwendungen auf die feineren Fragen der astheorie werde ich ausführlich in einem demnächst bei Teubner erscheinenden Buche zur Darstellung bringen.

Die Kenntnis der Hilbertschen Arbeit wird im folgenden vorausesetzt.

§ 1.

Die iterierten Kerne.

Im folgenden seien $\xi\,\eta\,\zeta$ (auch mit Indizes 1, 2 versehen) unbeschränkt variable reelle Größen, wir deuten sie als rechtwinkelige Cartesische Koordinaten im R_3. Das Raumelement werde $d\xi\,d\eta\,d\zeta = d\omega$ gesetzt. Wir benutzen auch nach Bedarf Polarkoordinaten $r, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, wobei

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \qquad \mathfrak{x} = \frac{\xi}{r}, \qquad \mathfrak{y} = \frac{\eta}{r}, \qquad \mathfrak{z} = \frac{\zeta}{r},$$

nd es sei dk das Flächenelement der Einheitskugel an der Stelle $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, lso

$$d\omega = r^2\,dr\,dk.$$

ndlich bedeute auch l, m, n, wo $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, einen Punkt der inheitskugel, und das Flächenelement der Kugel an dieser Stelle sei $d\mathfrak{s}$. as Zeichen Σ ohne weiteren Zusatz soll im folgenden immer die Summation über die drei Koordinatenrichtungen bedeuten, also z. B.

$$r^2 = \sum \xi^2, \qquad l\xi + m\eta + n\zeta = \sum l\xi, \qquad \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{y}\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{z}\mathfrak{z}_1 = \sum \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1.$$

n der Theorie spielen die „Stoßtransformationen" eine Rolle, definiert urch die orthogonal-invarianten Formeln

$$(1)\qquad \begin{aligned} \xi' &= \xi + l\,W & \xi_1' &= \xi_1 - l\,W \\ \eta' &= \eta + m\,W & \eta_1' &= \eta_1 - m\,W \\ \zeta' &= \zeta + n\,W & \zeta_1' &= \zeta_1 - n\,W, \end{aligned}$$

wobei

$$W = \sum l(\xi_1 - \xi).$$

Es ist eine lineare homogene Transformation der $\xi\,\eta\,\zeta\,\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1$ auf die gestrichenen Größen, welche mit ihrer Inversen identisch ist und überdies W in $-W$ überführt. Wir verabreden die Bezeichnung

$$\varphi' = \varphi(\xi'\,\eta'\,\zeta'), \qquad \varphi_1' = \varphi(\xi_1', \eta_1', \zeta_1'), \qquad \varphi_1 = \varphi(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$$

für eine beliebige Funktion $\varphi(\xi\,\eta\,\zeta)$.

Der Hilbertsche Integralausdruck für eine Funktion $\varphi(\xi\,\eta\,\zeta)$ lautet nun

$$J(\varphi) = \int\int |W|\, e^{-r^2 - r_1^2}(\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi_1')\, d\omega_1\, d\mathfrak{z}.$$

Die Integrationen sind, wie auch weiterhin, stets über den gesamten Raum $\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1$ und die ganze Oberfläche der Einheitskugel l, m, n zu erstrecken. Herr Hilbert zeigt, daß man setzen kann[2])

$$J(\varphi) = k(r)\,\varphi - \int K\left(r, r_1, \sum \xi\,\xi_1\right)\varphi_1\, d\omega_1,$$

worin

$$k = k(r) = \int\int |W|\, e^{-r^2 - r_1^2}\, d\omega_1\, d\mathfrak{z} = 4\pi^2 e^{-r^2}\left(\frac{e^{-r^2}}{2} + \left(r + \frac{1}{2r}\right)\int_0^r e^{-u^2}\, du\right)$$

und

$$K = 2A - B$$

mit

$$A = \frac{2\pi}{\sqrt{\sum(\xi_1 - \xi)^2}}\, e^{-r^2 - \frac{(\sum \xi_1(\xi_1 - \xi))^2}{\sum(\xi_1 - \xi)^2}},$$

$$B = 2\pi\sqrt{\sum(\xi_1 - \xi)^2}\; e^{-r^2 - r_1^2}.$$

Es kommt weiterhin nicht auf diese Gestalt von A und B an, sondern auf ihre ursprüngliche Definition, wonach für jede Funktion $\varphi(\xi\,\eta\,\zeta)$

$$(2)\quad \int A\,\varphi_1\, d\omega_1 = \int\int |W|\, e^{-r^2 - r_1^2}\varphi'\, d\omega_1\, d\mathfrak{z} = \int\int |W|\, e^{-r^2 - r_1^2}\varphi_1'\, d\omega_1\, d\mathfrak{z},$$

$$(3)\quad \int B\,\varphi_1\, d\omega_1 = \int\int |W|\, e^{-r^2 - r_1^2}\varphi_1\, d\omega_1\, d\mathfrak{z}.$$

K ist symmetrisch in den beiden Variablenreihen $\xi\,\eta\,\zeta$ und $\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1$ und überdies eine Orthogonalinvariante. Gegenstand der Untersuchung ist die Integralgleichung

$$J(\varphi) \equiv k\,\varphi - \int K\,\varphi_1\, d\omega_1 = f(\xi\,\eta\,\zeta),$$

[2]) In der Hilbertschen Arbeit lautet die Bezeichnung $-K$ statt K.

orin f gegeben und φ gesucht. Durch die Substitution

$$\Phi = \varphi\sqrt{k}, \qquad K^* = \frac{K}{\sqrt{k \cdot k_1}}$$

elangt man zu einer Integralgleichung 2. Art mit symmetrischem Kern

$$\Phi - \int K^* \Phi_1 \, d\omega_1 = \frac{f}{\sqrt{k}}$$

ir die Funktion Φ. Da die Funktion k im Unendlichen wie $r e^{-r^2}$ ver-chwindet, so schließt man durch eine kleine Rechnung, daß zwar K^{*2} ach $d\omega_1$ integrierbar ist, aber *nicht* noch ein zweites Mal nach $d\omega$.

Die Frage, welcher von den *iterierten Kernen* quadratisch nach $d\omega\, d\omega_1$ ntegrierbar ist, beantworten wir durch Entwicklung von $K^* = K^*(r, r_1, \Sigma \xi \xi_1)$ ach Kugelfunktionen der Variablen $x = \Sigma \xi \xi_1$. Es sei $P_n(x)$ die Kugel-nktion eines Argumentes mit dem Index n, definiert etwa durch die leichung

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (x + i\cos\varphi\sqrt{1-x^2})^n \, d\varphi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

ie erfüllt die Orthogonalitätsrelationen

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}.$$

Wir definieren die „Fourierkoeffizienten"

$$k_n^*(r, r_1) = \int_{-1}^{+1} K^*(r, r_1, x) P_n(x)\, dx = \frac{1}{2\pi}\int K^*\left(r, r_1, \sum \xi \xi_1\right) P_n\left(\sum \xi \xi_1\right) dk_1.$$

ie Rechnung ergibt folgendes:

Satz 1. *Es ist $k_n^*(r, r_1)$ symmetrisch in r, r_1 und es gilt*

$$k_n^*(r, r_1) = \frac{e^{-r^2 - r_1^2}}{\sqrt{k(r)\, k(r_1)}} \left\{ \frac{8\pi}{2n+1} \frac{M^{2n+1}}{(r r_1)^{n+1}} + \frac{4\pi M^{2n-1}}{(2n+1)(2n-1)(r r_1)^{n-1}} \right.$$
$$\left. - \frac{4\pi M^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)(r r_1)^{n+1}} + \frac{8\pi}{r r_1} \int_{|x|<M} x e^{x^2} E(x) P_n\left(\frac{x}{r}\right) P_n\left(\frac{x}{r_1}\right) dx \right\}.$$

arin bedeutet

M die kleinere der beiden Zahlen r, r_1,

$$E(x) = \int_0^x e^{-u^2} du.$$

Satz 2. *Es ist k_n^* quadratisch nach $d\omega\, d\omega_1$ integrierbar, d. h. es istiert*

$$c_n = \int\int k_n^{*2}(r, r_1)\, d\omega\, d\omega_1 = (4\pi)^2 \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} k_n^{*2}(r, r_1) r^2 r_1^2 \, dr\, dr_1.$$

Beim Beweise dieses Satzes ist wesentlich, daß der Nenner $k(r)$ von k_n^* sich im Unendlichen wie re^{-r^2}, nicht wie e^{-r^2}, der Null nähert.

Die Frage nach dem Verhalten der iterierten Kerne wird beantwortet durch

Satz 3. *Der p-fach iterierte Kern zu K^* ist jedenfalls dann quadratisch nach $d\omega\, d\omega_1$ integrierbar, wenn die Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, c_n^p$$

konvergiert.

Zum Beweise bedenken wir zunächst, daß für jede Funktion $H(r, r_1, x)$, welche für $-1 \leqq x \leqq +1$ in x stetig ist, die Vollständigkeitsrelation gilt

$$\int_{-1}^{+1} H^2(r, r_1, x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \Big(\int_{-1}^{+1} H(r, r_1, x) P_n(x)\, dx \Big)^2$$

und diese Gleichung darf, wenn die Integrale stetig in r, r_1 sind, auch noch gliedweise nach r, r_1 integriert werden. Daher konvergiert das Integral

$$\iint H^2\big(r, r_1, \textstyle\sum \xi\xi_1\big)\, d\omega\, d\omega_1$$

sicher dann, wenn die unendliche Reihe

$$(4) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \int_{r=0}^{\infty} \int_{r_1=0}^{\infty} r^2 r_1^2 \Big\{ \int_{-1}^{+1} H(r, r_1, x) P_n(x)\, dx \Big\}^2 dr\, dr_1$$

konvergiert. Wir setzen nun für H den p-fach iterierten Kern zu K^* ein ($p \geqq 2$), welcher definiert ist durch die Formel

$$K_p^*\big(r, r_1, \textstyle\sum \xi\xi_1\big) = \int K_{p-1}^*\big(r, r_2, \sum \xi\xi_2\big)\, K^*\big(r_2, r_1, \sum \xi_1\xi_2\big)\, d\omega_2.$$

Für dessen Fourierkoeffizienten

$$k_n^{*(p)}(r, r_1) = \int_{-1}^{+1} K_p^*(r, r_1, x) P_n(x)\, dx$$

gilt dann auf Grund bekannter Integraleigenschaften der $P_n(x)$ eine ähnliche Rekursionsformel

$$k_n^{*(p)}(r, r_1) = \frac{1}{2} \int k_n^{*(p-1)}(r, r_2)\, k_n^*(r_1, r_2)\, d\omega_2$$

und daher vermöge der Schwarzschen Ungleichung

$$k_n^{*(p)}(r, r_1)^2 \leqq \frac{1}{4} \int k_n^{*(p-1)}(r, r_2)^2\, d\omega_2 \cdot \int k_n^*(r_1, r_2)^2\, d\omega_2$$

und durch vollständige Induktion bezüglich p

$$\iint k_n^{*(p)}(r, r_1)^2\, d\omega\, d\omega_1 \leqq \frac{c_n^p}{4^{p-1}}.$$

ehmen wir in (4) für H den p-fach iterierten Kern zu K^*, so kon-
rgiert jene Reihe also sicher dann, wenn $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)c_n^p$ konvergiert.
amit ist Satz 3 bewiesen.

Die *Abschätzung von* c_n als Funktion von n ergibt nun die Aussage: $\sqrt{n}\,c_n|$ ist beschränkt; daraus folgt die Konvergenz jener Reihe für $p \geqq 5$
nd somit

Satz 4. *Der fünffach iterierte Kern zu* K^* *ist quadratisch nach* $\omega\, d\omega_1$ *integrierbar.*

§ 2.

Die Eigenwerte der Integralgleichung.

Wir fragen nach denjenigen Werten λ, wofür die homogene Gleichung

$$k\varphi - \lambda \int K \varphi_1 \, d\omega_1 = 0$$

ne nicht identisch verschwindende Lösung φ besitzt. Es ist bereits
ekannt, daß für $\lambda = 1$ die Gleichung genau fünf linear unabhängige
ösungen hat, nämlich $\varphi = 1, \xi, \eta, \zeta, \Sigma\xi^2$. Und zwar folgt das aus der
dentität in φ

$$\int \varphi J(\varphi)\, d\omega = \frac{1}{4}\int\int\int |W| e^{-r^2-r_1^2}(\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi_1')^2 \, d\omega\, d\omega_1\, d\xi,$$

so

$$\int \varphi J(\varphi)\, d\omega \geqq 0. \tag{6}$$

iese Ungleichung hat weiterhin zur Folge

Satz 5. *Das Intervall* $0 < \lambda < 1$ *ist von Eigenwerten frei.*

Die Gleichung (5) läßt sich nämlich auch schreiben

$$\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) k\varphi + J(\varphi) = 0.$$

ach Multiplikation mit $\varphi\, d\omega$ und Integration nach $d\omega$ ergibt sich
egen (6) hieraus

$$\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)\int k\varphi^2 \, d\omega \leqq 0,$$

h.

$$\frac{1}{\lambda} - 1 \leqq 0,$$

so entweder $\lambda \geqq 1$ oder $\lambda < 0$.

Ferner gilt aber der wesentlich tiefer liegende

Satz 6. *Alle Eigenwerte von* K^* *sind positiv.*

Nach den Ergebnissen von § 1 hat nämlich jeder Eigenwert nur
dliche Vielfachheit. Es sei nun $\Phi_i = \sqrt{k}\,\varphi_i(\xi\eta\zeta)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

ein vollständiges System orthogonaler und normierter Eigenfunktionen von K^*, welche zum Eigenwert λ gehören. Bedeute S das Zeichen für eine orthogonale Transformation der $\xi\,\eta\,\zeta$, so sind die Funktionen $\Phi_i(S(\xi\,\eta\,\zeta))$ offenbar ebenfalls Eigenfunktionen von K^*, zum Eigenwert λ gehörig, da ja der Kern K^* eine Orthogonalinvariante ist. Überdies sind die n Funktionen $\Phi_i(S(\xi\,\eta\,\zeta))$ wiederum orthogonal und normiert. Folglich sind die $\Phi_i(S(\xi\,\eta\,\zeta))$ lineare Kombinationen der $\Phi_i(\xi\,\eta\,\zeta)$

$$\Phi_i(S(\xi\,\eta\,\zeta)) = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\,\Phi_i(\xi\,\eta\,\zeta),$$

worin das Koeffizientenschema c_{ik} selbst wieder eine orthogonale Matrix bildet, und folglich ist der Ausdruck

$$h(\xi\,\eta\,\xi,\,\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1) = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\xi\,\eta\,\zeta)\,\varphi_i(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1) = \frac{1}{\sqrt{k(r)\,k(r_1)}}\sum_{i=1}^{n}\Phi_i(\xi\,\eta\,\zeta)\,\Phi_i(\xi_1\,\eta_1\,\zeta$$

eine Orthogonalinvariante der beiden Variablenreihen $\xi\,\eta\,\zeta$ und $\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1$.

Aus der Gleichung

$$k\,\varphi_i(\xi\,\eta\,\zeta) - \lambda\int K\,\varphi_i(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\,d\omega_1 = 0 \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

folgt nun durch Multiplikation mit $\varphi_i(\xi\,\eta\,\zeta)\,d\omega$, Integration nach $d\omega$ und Summation über i

$$\sum_{i=1}^{n}\int k\,\varphi_i^2(\xi\,\eta\,\zeta)\,d\omega = \lambda\iint K\Big(\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\xi\,\eta\,\xi)\,\varphi_i(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\Big)\,d\omega\,d\omega_1.$$

Zum Beweise von Satz 6 braucht man daher nur zu zeigen:

$$Z \equiv \iint K\,h(\xi\,\eta\,\zeta,\,\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\,d\omega\,d\omega_1 \geqq 0.$$

Nach der Definition von K ist nun bei festem $\xi\,\eta\,\zeta$ für jede Funktion $g(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ (vgl. Gl. (2))

$$\begin{aligned}\int K\,g_1\,d\omega_1 &= \int(2A - B)\,g_1\,d\omega_1\\ &= \iint |W|\,e^{-r^2-r_1^2}\,(2\,g(\xi_1',\eta_1',\zeta_1') - g(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1))\,d\omega_1\,d\mathfrak{z}.\end{aligned}$$

Für den folgenden Schluß ist dabei wesentlich, daß die Integralbestandteile mit g' und g_1' einander gleich sind. Wir setzen in dieser Gleichung an Stelle von $g(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)$ unsere Größe $h(\xi\,\eta\,\zeta,\,\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$ und integrieren sodann nach $d\omega$. Damit wird

$$\begin{aligned}&\iint K\,h(\xi\,\eta\,\zeta,\,\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\,d\omega\,d\omega_1\\ &= \iiint |W|\,e^{-r^2-r_1^2}\big\{2\,h(\xi\,\eta\,\zeta,\,\xi_1'\,\eta_1'\,\zeta_1') - h(\xi\,\eta\,\zeta,\,\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\big\}\,d\omega\,d\omega_1\,d\mathfrak{z}.\end{aligned}$$

In diesem Integral denken wir uns nun zuerst die Integrationen nach $d\omega\,d\omega_1$ ausgeführt. Das Resultat ist nur Funktion des Punktes l, m, n auf

er Einheitskugel; da der Integrand aber, wie oben gezeigt, eine Orthogonal-
ivariante ist, so ist diese Funktion eine Funktion nur von $l^2+m^2+n^2=1$,
h. von l, m, n ganz unabhängig. Ohne den Integralwert zu ändern, kann
an daher in dem Integranden für l, m, n ein spezielles Wertsystem, etwa

$$l=1, \quad m=n=0$$

etzen. Hierfür sind nach (1)

$$W=\xi_1-\xi, \quad \xi_1'=\xi, \quad \eta_1'=\eta_1, \quad \zeta_1'=\zeta_1$$

so unser Integral Z, wenn wir noch für h seinen Wert eintragen,

$$\int|\xi-\xi_1|\,e^{-r^2-r_1^2}\sum_{i=1}^{n}\Big(2\,\varphi_i(\xi\,\eta\,\zeta)\,\varphi_i(\xi\,\eta_1\,\zeta_1)-\varphi_i(\xi\,\eta\,\zeta)\,\varphi_i(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)\Big)\,d\omega\,d\omega_1.$$

Hierin führen wir zur Abkürzung ein

$$\psi_i(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int e^{-\eta^2-\zeta^2}\,\varphi_i(\xi\,\eta\,\zeta)\,d\eta\,d\zeta$$

nd erhalten

$$Z=4\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int|\xi-\xi_1|\,e^{-\xi^2-\xi_1^2}\sum_{i=1}^{n}\{2\,\psi_i^2(\xi)-\psi_i(\xi)\,\psi_i(\xi_1)\}\,d\xi\,d\xi_1.$$

ies ist in der Tat $\geqq 0$; denn man vertausche im ersten Bestandteil mit
das ξ und ξ_1; dann erhält man

$$Z=4\pi\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int|\xi-\xi_1|\,e^{-\xi^2-\xi_1^2}\sum_{i=1}^{n}\{\psi_i^2(\xi)+\psi_i^2(\xi_1)-\psi_i(\xi)\,\psi_i(\xi_1)\}\,d\xi\,d\xi_1$$

nd hierin ist die Klammer gleich

$$\frac{\psi_i^2(\xi)+\psi_i^2(\xi_1)}{2}+\frac{1}{2}(\psi_i(\xi)-\psi_i(\xi_1))^2\geqq 0, \quad Z\geqq 0, \text{ q. e. d.}$$

§ 3.

eduktion auf Integralgleichungen in einer Variablen und gewöhnliche Differentialgleichungen.

Nach Satz 5 und 6 kann man zur Lösung der inhomogenen Integral-
eichung

$$\Phi-\int K^*\,\Phi_1\,d\omega_1=\frac{t}{\sqrt{k}}$$

e bekannte Iterationsmethode verwenden, welche Φ in Form einer un-
dlichen Reihe liefert. Macht man nun aber von der Tatsache Gebrauch,
ß die zur Bestimmung der Wärmeleitungs- und Reibungsglieder dienende

Funktion f eine besonders einfache Gestalt hat, so gelangt man zu einer erheblichen Vereinfachung und zwar auf Grund folgenden allgemeinen Satzes[3]):

Satz 7. *Sei $Y_n(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})$ eine Kugelfunktion n-ter Ordnung des Punktes $\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z}$ auf der Einheitskugel. Wenn dann die Gleichung*

$$(7) \qquad k\varphi - \int K\Big(r, r_1, \sum \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1\Big)\varphi_1 \, d\omega_1 = Y_n(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z}) f(r)$$

überhaupt eine Lösung φ hat, so hat sie gewiß auch eine Lösung von der Form

$$\varphi = Y_n(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})\psi(r),$$

worin $\psi(r)$ der Gleichung

$$(8) \qquad k\cdot\psi(r) - \int_0^\infty 2\pi k_n(r,r_1)\,\psi(r_1)\,r_1^2\,dr_1 = f(r)$$

genügt, und

$$k_n(r,r_1) = \int_{-1}^{+1} K(r,r_1,x)\,P_n(x)\,dx$$

eine symmetrische Funktion von r, r_1 ist.

Zunächst gilt nämlich für jede stetige Funktion $G(x)$ die Integralformel

$$\int G\Big(\sum \mathfrak{x}\mathfrak{x}_1\Big) Y_n(\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{y}_1\,\mathfrak{z}_1)\,d k_1 = 2\pi\, Y_n(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}) \int_{-1}^{+1} G(x)\,P_n(x)\,dx\,.$$

Denn wenn $G(x)$ eine Kugelfunktion $P_m(x)$ ist, drückt die Formel eine bekannte Beziehung zwischen Y_n, P_m aus. Als lineare homogene Relation für G gilt sie daher allgemein für jede stetige Funktion. Hieraus ergibt sich: Wenn $\psi(r)$ der Gl. (8) genügt, so genügt $\varphi = Y_n\psi(r)$ jedenfalls der Gl. (7). Die homogene Gl. (8) hat daher nur solche Lösungen ψ, wofür $Y_n\psi$ die homogene Gl. (7) erfüllt, wofür also $Y_n\psi$ gleich einer Kombination der fünf Lösungen $1, r\mathfrak{x}, r\mathfrak{y}, r\mathfrak{z}, r^2$ ist. Daraus folgt: Die homogene Gl. (8) hat nur die Lösungen

$$\begin{aligned} &\psi = 1, r^2 && \text{für } n = 0,\\ &\psi = r && \text{für } n = 1,\\ &\text{keine Lösung} && \text{für } n \geqq 2. \end{aligned}$$

Auf (8) ist aber nach § 1 die Fredholm-Hilbertsche Theorie anwendbar, und folglich ist notwendig und hinreichend, damit die inhomogene Gl. (8) eine Lösung besitzt, das Erfülltsein der Orthogonalitätsbedingungen

[3]) Vgl. hierzu meine Note: Über orthogonalinvariante Integralgleichungen, Math. Ann. 78, S. 398.

$$\int_0^\infty f(r) r^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ r^2 \end{Bmatrix} dr = 0, \quad \text{wenn } n = 0.$$

$$\int_0^\infty f(r) r^3 \, dr = 0, \quad \text{wenn } n = 1.$$

Das sind aber genau die Lösbarkeitsbedingungen von (7), denn Kugelfunktionen verschiedener Ordnung sind immer orthogonal zu einander. Somit erhält man in der Tat die allgemeinste Lösung von (7), indem man aus einer Lösung der Integralgleichung *einer Variablen* (8) $\psi(r)$ die Funktion $Y_n \psi(r)$ bildet und eine Lösung der homogenen Gleichung hinzufügt.

Zur Bestimmung der sog. Wärmeleitungsglieder der Maxwellschen Funktion F erhält man nun eine Gleichung wie (8) mit $n = 1$, ebenso für die Reibungsglieder eine solche mit $n = 2$. Daraus folgt:

Satz 8. *In der Hilbertschen Theorie besteht das Problem, die Maxwellsche Funktion F in zweiter Näherung zu bestimmen, darin, zwei Funktionen einer Variablen aus je einer linearen Integralgleichung 1. Art zu berechnen*[4]).

Verfolgt man auch die höheren Näherungen in der Hilbertschen Theorie, so findet man auch da einen ähnlichen Satz: Bei jedem Schritt handelt es sich immer um die Bestimmung von endlich vielen Funktionen einer Variablen aus einer Integralgleichung.

Es ist nun bemerkenswert und für einen Konvergenzbeweis des Hilbertschen Verfahrens vielleicht wichtig, daß die eben gefundenen Integralgleichungen mit den Kernen k_n aus gewöhnlichen Differentialgleichungen entspringen. Man überzeugt sich davon leicht auf folgende Weise: Nach Satz 1 ist $k_n(r, r_1)$ symmetrisch und ist für $r_1 \leqq r$ als endliche Summe von Produkten darstellbar,

$$2\pi k_n(r, r_1) = \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu(r) \beta_\nu(r_1),$$

wo α_ν, β_ν nur von je einer der Variablen r, r_1 abhängen. Somit hat die Integralgleichung (8) die Gestalt

$$k(r)\psi(r) - \sum_{\nu=1}^{m} \alpha_\nu(r) \int_0^r \beta_\nu(r_1) \psi(r_1) r_1^2 \, dr_1$$

$$- \sum_{\nu=1}^{m} \beta_\nu(r) \int_0^\infty \alpha_\nu(r_1) \psi(r_1) r_1^2 dr_1 = f(r).$$

---

[4]) Auf anderem Wege ist dieser Satz zuerst bewiesen worden von D. Enskog, Kinetische Theorie d. Vorgänge in mäßig verdünnten Gasen, Dissertation, Upsala 1917.

Differentiiert man diese Gleichung nun genügend oft nach r, so erhält man durch Kombination der so entstehenden Gleichungen eine lineare Differentialgleichung für $\psi(r)$. Für die Wärmeleitungsfunktion ($n = 1$) erhält man so eine lineare Differentialgleichung 4. Ordnung, die man noch auf eine solche der 3. Ordnung reduzieren kann, da man ein Integral der homogenen Gleichung kennt. Auch für $n = 2$ (Reibungsglieder) erhält man eine Gleichung 4. Ordnung. Die Ordnung wächst übrigens mit n ins Unendliche.

§ 4.

Eine neue Methode zur Auflösung von Integralgleichungen.

Zur numerischen Auflösung der Hilbertschen Integralgleichung hat Herr D. Enskog[4]) eine andere, auf einem sehr einfachen und schönen mathematischen Gedanken beruhende Methode angegeben. Da diese Arbeit in mathematischen Kreisen wenig bekannt zu sein scheint, auch die Darstellung des Herrn Enskog die Allgemeinheit seiner Methode nicht deutlich erkennen läßt, so bringe ich hier ihren mathemathischen Inhalt einmal losgelöst von dem physikalischen Problem zur Darstellung.

Es sei ein Integralausdruck

$$J(\varphi) \equiv k(s)\varphi(s) - \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt$$

vorgelegt. Hierin seien $k(s)$ und $K(s,t)$ bestimmte stetige Funktionen der reellen Variablen s und t im Gebiet $a \leqq \overset{s}{t} \leqq b$, überdies $K(s,t)$ symmetrisch in s,t. Es handelt sich nun um die Auflösung der Gleichung

$$J(\varphi) = f(s)$$

bei gegebenem stetigen $f(s)$.

Wir machen die *Voraussetzung*:

Der quadratische Integralausdruck $\int_a^b \varphi J(\varphi)\,ds$ sei positiv definit, d. h. für jedes nicht identisch verschwindende stetige $\varphi(s)$ sei

$$\int_a^b k(s)\varphi^2(s)\,ds - \int_a^b\int_a^b K(s,t)\varphi(s)\varphi(t)\,ds\,dt > 0\,.$$

Nun sei $u_n(s)$ $(n = 1, 2 \ldots)$ ein solches System linearer unabhängiger Funktionen, daß man jede im Intervall $a \ldots b$ stetige Funktion durch eine lineare Kombination endlich vieler $u_n(s)$ mit beliebiger Genauigkeit gleichmäßig approximieren kann. Statt nun auf das System $u_n(s)$ das gewöhnliche Orthogonalisierungsverfahren anzuwenden, setzen wir vielmehr eine *andere, mit Bezug auf $J(\varphi)$ definierte Normierung fest*: Es bedeute nämlich

$$v_n(s) = A_{n1}u_1(s) + A_{n2}u_2(s) + \ldots + A_{nn}u_n(s)$$

ne solche Kombination der $u_1, \ldots, u_n$ mit konstanten A, daß

$$\int_a^b v_n J(v_m) ds = \delta_{nm}, \qquad 1 \leqq m \leqq n; \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Vegen der Annahme

$$\int_a^b \varphi J(\varphi) ds > 0$$

t die sukzessive Bestimmung der v_n offenbar eindeutig möglich. Mit iesem so normierten Funktionensystem kann man jetzt zu jeder stetigen unktion $g(s)$ ein System verallgemeinerter „Fourierkoeffizienten"

$$c_k = \int_a^b g(s) J(v_k) ds = \int_a^b v_k(s) J(g) ds$$

ilden, derart, daß wegen der „Vollständigkeit" des Systems der u auch ir die v die „Vollständigkeitsrelation"

$$\int_a^b g(s) J(g) ds = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

esteht, und folglich auch für zwei stetige Funktionen $g(s)$ und $h(s)$ mmer die Gleichung

$$\int_a^b g(s) J(h) ds = \int_a^b h(s) J(g) ds = \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k$$

lt, worin die c_k und a_k jene Fourierkoeffizienten von g und h sind.

Durch die Koeffizienten c_k ist die stetige Funktion $g(s)$ wieder ein-eutig bestimmt, und es ist

$$g(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(s),$$

lls diese Reihe gleichmäßig konvergiert.

Aus der Gleichung $J(\varphi) = f(s)$ lassen sich nun die Fourierkoeffizien-n der gesuchten Funktion φ sofort ermitteln; sie sind nämlich

$$a_k = \int_a^b \varphi(s) J(v_k) ds = \int_a^b v_k(s) J(\varphi) ds = \int_a^b v_k(s) f(s) ds,$$

nd die Lösung ist

$$\varphi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k(s),$$

falls diese Reihe gleichmäßig konvergiert. *In jedem Falle* aber gilt

$$\int_a^b \varphi J(\varphi)\,ds = \int_a^b \varphi(s) f(s)\,ds = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_a^b f(s)\, v_k(s)\,ds \right)^2 .$$

Grade die hierzu analogen Integrale sind es aber, welche aus der Hilbertschen Integralgleichung den *Wärmeleitungs-* und *Reibungs-Koeffizienten* definieren. Ein Nachteil dieses Verfahrens ist, daß man über die Schnelligkeit der Konvergenz dieser Reihe von vornherein nichts aussagen kann. Deshalb scheinen mir auch die numerischen Resultate von Herrn Enskog vorläufig nur heuristischen Wert zu haben.

Hamburg, Mathem. Seminar, August 1921.

(Eingegangen am 22. August 1921.)

in Beitrag zur Hilbertschen Theorie der vollstetigen quadratischen Formen.

Von

I. Schur in Berlin.

Eine beschränkte quadratische Form mit reellen Koeffizienten

$$A(x) = \sum_{\varkappa,\lambda}^{\infty}{}_1 a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda \qquad (a_{\varkappa\lambda} = a_{\lambda\varkappa})$$

nnt Herr Hilbert[1]) bekanntlich vollstetig, wenn für jede Folge von nkten

$$(\xi^{(\nu)}) \qquad \xi_1^{(\nu)}, \xi_2^{(\nu)}, \xi_3^{(\nu)}, \ldots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

s durch die Bedingung

$$E(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} x_\lambda^2 \leqq 1$$

finierten Raumes, für welche die Grenzwerte

$$\lim_{\nu\to\infty} \xi_\varkappa^{(\nu)} = \xi_\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots)$$

nzeln existieren,

$$\lim_{r\to\infty} A(\xi^{(r)}) = A(\xi)$$

. Der Hilbertsche Hauptsatz über vollstetige Formen lautet: Dann d nur dann ist $A(x)$ vollstetig, wenn sich $A(x)$ durch eine orthogonale ansformation

$$x_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{\infty} p_{\varkappa\lambda} y_\lambda$$

f die Form

$$A(x) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \omega_\lambda y_\lambda^2$$

---

[1]) Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen (Vierte teilung), Göttinger Nachrichten 1906, S. 157–227.

bringen läßt, wobei $\lim_{\lambda \to \infty} \omega_\lambda = 0$ wird. — Während nun die Beschränktheit einer Form $A(x)$ allein durch ihre Koeffizienten $a_{\varkappa\lambda}$ charakterisiert werden kann, nämlich durch die Forderung, daß die charakteristischen Wurzeln

$$\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \ldots, \alpha_{nn} \tag{1}$$

aller Abschnitte

$$A_n(x) = \sum_{\varkappa,\lambda}^{n} a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$$

in einem endlichen Intervall liegen sollen, erscheint die Vollstetigkeit auch unter Hinzunahme des Hauptsatzes als eine Eigenschaft von höherem transzendenten Charakter. Es dürfte nun nicht ohne Interesse sein, auch die Vollstetigkeit allein mit Hilfe des Systems der Wurzeln (1) zu kennzeichnen. Ein solches Kriterium wird im folgenden angegeben (Satz II). Beim Beweis dieses Satzes habe ich Gewicht darauf gelegt, von dem Begriff des Spektrums keinen Gebrauch zu machen. Ich setze nur die einfachsten Sätze über beschränkte Formen und orthogonale Substitutionen sowie den Hilbertschen Hauptsatz über vollstetige Formen als bekannt voraus[2]).

§ 1.

Eine Hilfsbetrachtung über quadratische Formen mit endlich vielen Variablen.

I. *Ist*

$$A = \sum_{\varkappa,\lambda}^{n} a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$$

eine reelle quadratische Form

$$B = \sum_{\varkappa,\lambda}^{n-1} a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$$

ihr $(n-1)$-ter Abschnitt, und bezeichnet man die charakteristischen Wurzeln von A mit

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \ldots \geqq \alpha_n, \tag{2}$$

die von B mit

$$\beta_1 \geqq \beta_2 \geqq \beta_3 \geqq \ldots \geqq \beta_{n-1}, \tag{3}$$

so ist stets

$$\alpha_1 \geqq \beta_1 \geqq \alpha_2 \geqq \beta_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_{n-1} \geqq \beta_{n-1} \geqq \alpha_n. \tag{4}$$

[2]) Das hier bewiesene Kriterium ist mir bereits seit vielen Jahren bekannt. Einen anderen Beweis, der sich auf Sätze über das Spektrum stützt, hat mir schon vor längerer Zeit Herr E. Hellinger mitgeteilt.

Dies ist ein bekannter Satz über quadratische Formen. Er läßt sich mkehren:

I*. *Ist eine quadratische Form B mit $n-1$ Variablen gegeben, eren charakteristische Wurzeln die Größen* (3) *sind, und wählt man n eliebige Größen* (2), *so daß die Bedingungen* (4) *erfüllt sind, so kann an eine Form A mit n Variablen herstellen, deren $(n-1)$-ter Abschnitt ie Form B ist und deren charakteristische Wurzeln die Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sind.*

Man bestimme nämlich die orthogonale Transformation

$$x_\varkappa = p_{\varkappa 1} y_1 + p_{\varkappa 2} y_2 + \ldots + p_{\varkappa, n-1} y_{n-1} \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n-1),$$

daß B in

$$\mathsf{B} = \beta_1 y_1^2 + \beta_2 y_2^2 + \ldots + \beta_{n-1} y_{n-1}^2$$

bergeht. Es genügt dann zu zeigen, daß B sich zu

5) $$\mathsf{A} = \beta_1 y_1^2 + \ldots + \beta_{n-1} y_{n-1}^2 + 2\sum_{\nu=1}^{n-1} c_\nu y_\nu y_n + c_n y_n^2$$

ergänzen läßt, daß die Nullstellen der charakteristischen Determinante (λ) von A die Größen α_ν werden. Denn alsdann liefert die aus A durch ie orthogonale Transformation

$$y_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{n-1} p_{\lambda\varkappa} x_\lambda, \quad y_n = x_n \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n-1)$$

ervorgehende Form A eine Lösung unserer Aufgabe. Der zu beweisende atz, der für $n = 2$ leicht zu bestätigen ist, sei für $n' < n$ schon als chtig erkannt. Ist nun $\alpha_\varkappa = \beta_\varkappa$ für irgendein $\varkappa$ und läßt man in B as Glied $\beta_\varkappa y_\varkappa^2$ fort, so entstehe die Form B_1. Die Größen

2′) $$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\varkappa-1}, \alpha_{\varkappa+1}, \ldots, \alpha_n$$

enügen dann wieder in bezug auf B_1 der hier zu stellenden Forderung. an bilde nun durch Ränderung von B_1 eine Form A_1 der Variablen $, \ldots, y_{\varkappa+1}, y_{\varkappa-1}, \ldots, y_n$ mit den Wurzeln (2′). Die Form $\mathsf{A} = \alpha_\varkappa y_\varkappa^2 + \mathsf{A}_1$ ellt dann eine Lösung unserer Aufgabe dar. Ist aber niemals $\alpha_\varkappa = \beta_\varkappa$, so nd insbesondere die $n-1$ Größen (3) voneinander verschieden. Setzt man

$$(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)\ldots(\lambda - \alpha_n), \quad \psi(\lambda) = (\lambda - \beta_1)(\lambda - \beta_2)\ldots(\lambda - \beta_{n-1}),$$

wird in diesem Falle $\psi'(\beta_\varkappa) \neq 0$, $\varphi(\beta_\varkappa)\psi'(\beta_\varkappa) \leqq 0$, wobei das Gleichheitszeichen nur noch für $\varkappa = n-1$ (im Falle $\beta_{n-1} = \alpha_n$) in Betracht ommt. Man braucht dann in (5) nur

$$c_\nu = \sqrt{\frac{\varphi(\beta_\nu)}{\psi'(\beta_\nu)}}, \qquad c_n = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n - \beta_1 - \ldots - \beta_{n-1}$$

zu setzen. Denn es wird dann

$$D(\lambda) = |\lambda E - \mathsf{A}| = \psi(\lambda)\left[\lambda - c_n - \frac{c_1^2}{\lambda - \beta_1} - \cdots - \frac{c_{n-1}^2}{\lambda - \beta_{n-1}}\right],$$

und diese Funktion stimmt mit $\varphi(\lambda)$ in den Koeffizienten λ^n und λ^{n-1} und außerdem an den $n-1$ Stellen β_ν überein. Daher ist $D(\lambda) = \varphi(\lambda)$[3]).

§ 2.

Formulierung des Kriteriums für vollstetige Formen.

Es sei nun $A(x) = \sum a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda$ eine quadratische Form mit unendlich vielen Variablen, die wir zunächst nur als beschränkt voraussetzen. Für jeden Abschnitt $A_n(x)$ von $A(x)$ denke man sich die charakteristischen Wurzeln (1) bestimmt, und es sei hierbei

$$\alpha_{n1} \geqq \alpha_{n2} \geqq \cdots \geqq \alpha_{nn}.$$

Wir betrachten dann *das zu $A(x)$ gehörende Dreiecksschema*

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_{11} & & & & & & \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & & & & \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \tag{6}$$

Hierin ist wegen I in der ϱ-ten „Kolonne“

$$\alpha_{\varrho\varrho} \geqq \alpha_{\varrho+1,\varrho} \geqq \alpha_{\varrho+2,\varrho} \geqq \cdots \tag{7}$$

und in der σ-ten „Diagonale“

$$\alpha_{\sigma 1} \geqq \alpha_{\sigma+1,2} \geqq \alpha_{\sigma+2,3} \geqq \cdots \tag{8}$$

Außerdem liegen, da $A(x)$ beschränkt sein soll, alle $\alpha_\varkappa$ in einem endlichen Intervall. Daher existieren auch die Grenzwerte

$$\lim_{\nu\to\infty} \alpha_{\nu\varrho} = \alpha_\varrho, \qquad \lim_{\nu\to\infty} \alpha_{\sigma+\nu,\nu+1} = \alpha_\sigma^*.$$

Hierbei wird offenbar

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots, \qquad \alpha_1^* \leqq \alpha_2^* \leqq \cdots$$

---

[3]) Herr H. Hamburger macht mich darauf aufmerksam, daß für den Fall

$$\alpha_1 > \beta_1 > \alpha_2 > \beta_2 > \cdots > \beta_{n-1} > \alpha_n$$

ein Beweis des Satzes I* auch leicht aus der Theorie der Kettenbrüche folgt. Vgl. z. B. die Formel (8) in der Arbeit von E. Hellinger und O. Toeplitz, Zur Einordnung der Kettenbruchtheorie in die Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen, J. für Math. **144** (1914), S. 212–238.

olglich existieren auch die Grenzwerte

$$\lim_{\varrho\to\infty}\alpha_\varrho=\alpha, \qquad \lim_{\sigma\to\infty}\alpha_\sigma^*=\alpha^*.$$

Vegen $\alpha_{\nu\varrho}\geqq a_{\nu,\nu-\varrho+1}$ für $\nu\geqq 2\varrho-1$ ist ferner $\alpha_\varrho\geqq\alpha_\varrho^*$, also auch $\alpha\geqq\alpha^*$.

Die Zahlen α_ϱ und α_σ^* will ich die *charakteristischen Zahlen erster nd zweiter Art* von $A(x)$ nennen. Sie sind für jede beschränkte Form on Wichtigkeit. Insbesondere beweist man ohne Mühe, daß jede Häufungstelle h der $\alpha_{\varkappa\lambda}$, die von den α_ϱ und α_σ^* verschieden ist, der Bedingung $\geqq h\geqq\alpha^*$ genügen muß. Aus dem Satze I* des vorigen Paragraphen rgibt sich ferner, daß zu jedem Schema (6), das den Bedingungen (7) nd (8) genügt, eine quadratische Form $A(x)$ angegeben werden kann, u der (6) als Dreiecksschema gehört. Diese Bedingungen sind also die inzigen, denen die Wurzeln der Abschnitte einer Form $A(x)$ unterworfen nd. Für eine beschränkte Form ist α_1 bekanntlich nichts anderes als ie obere Grenze, α_1^* die untere Grenze von $A(x)$ unter der Nebenedingung $E(x)=\sum x_\lambda^2=1$.

Im folgenden soll nun bewiesen werden:

II. *Die Form $A(x)$ ist dann und nur dann vollstetig, wenn $=\alpha^*=0$ ist.*

§ 3.

Die charakteristischen Zahlen als Orthogonalinvarianten.

Wir wollen zunächst allgemein zeigen:

III. *Wendet man auf die beschränkte Form $A(x)$ eine orthogonale ransformation an, so bleiben die charakteristischen Zahlen α_ϱ, α_σ^* ungendert.*

Die charakteristischen Zahlen von $B=-A$ sind offenbar $\beta_\varrho=-\alpha_\varrho^*$, $_\sigma^*=-\alpha_\sigma$. Für jede Konstante t sind ferner $t+\alpha_\varrho$, $t+\alpha_\sigma^*$ die charakristischen Zahlen der Form $tE(x)+A(x)$. Hieraus folgt unmittelbar, aß wir nur zu zeigen haben:

III*. *Für jede beschränkte positiv definite Form*[4]) *$A(x)$ bleiben ie charakteristischen Zahlen erster Art $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ bei einer orthogonalen ransformation ungeändert.*

Für α_1, die obere Grenze von $A(x)$ für $E(x)=1$, ist das selbstrständlich. Um dasselbe auch für $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ zu beweisen, führen wir ie auch sonst nützlichen „Determinantentransformationen“ ein. Für jede

[4]) Hierunter verstehen wir im folgenden eine Form, deren untere Grenze α_1^* ositiv ist.

endliche oder unendliche Matrix $L = (l_{\varkappa\lambda})$ bilde man bei festem $m \geqq 1$ die sämtlichen Unterdeterminanten

$$(9) \qquad D^{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_m}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m} = \begin{vmatrix} l_{\varkappa_1\lambda_1} & l_{\varkappa_1\lambda_2} & \cdots & l_{\varkappa_1\lambda_m} \\ l_{\varkappa_2\lambda_1} & l_{\varkappa_2\lambda_2} & \cdots & l_{\varkappa_2\lambda_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{\varkappa_m\lambda_1} & l_{\varkappa_m\lambda_2} & \cdots & l_{\varkappa_m\lambda_m} \end{vmatrix} \qquad \begin{matrix} (\varkappa_1 < \varkappa_2 < \ldots < \varkappa_m, \\ \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m). \end{matrix}$$

Die hierbei zu betrachtenden Indizeskombinationen $\varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_m$ ordne man so an, daß $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ vor der Kombination $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m$ zu stehen kommt, wenn die *letzte* nicht verschwindende unter den Differenzen $\sigma_1 - \varrho_1, \sigma_2 - \varrho_2, \ldots, \sigma_m - \varrho_m$ positiv ausfällt. Die Matrix der Determinanten (9) erscheint dann als eine wohlbestimmte endliche oder unendliche Matrix $M = C_m L$[5]).

Bedeutet L_ν den ν-ten Abschnitt von L und M_ν den von M, so wird insbesondere für $n \geqq m$

$$M_{\binom{n}{m}} = C_m L_n.$$

Sind nun $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ die charakteristischen Wurzeln der Matrix L_n, so sind dann bekanntlich die von $C_m L_n$ die $\binom{n}{m}$ Produkte $\omega_{\varrho_1}\omega_{\varrho_2}\ldots\omega_{\varrho_m}$ $(\varrho_1 < \varrho_2 < \ldots < \varrho_m)$. Hieraus folgt leicht, daß, wenn $L = A$ die Matrix einer beschränkten quadratischen Form $A(x)$ ist, sich auch M als Matrix einer ebensolchen Form auffassen läßt. Ist insbesondere $A(x)$ positiv definit, so wird in den früheren Bezeichnungen die größte Wurzel der Matrix $M_{\binom{n}{m}}$ gleich $\alpha_{n1}\alpha_{n2}\ldots\alpha_{nm}$. Daher tritt beim Übergang von A zu M an Stelle von α_1 die Zahl $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m$.

Für je zwei unendliche Matrizen L_1 und L_2, für die das Produkt $L_1 L_2$ einen Sinn hat, ist ferner, wie aus der entsprechenden Gleichung für endliche Matrizen durch einen Grenzübergang ohne Mühe geschlossen werden kann,

$$(C_m L_1)(C_m L_2) = C_m(L_1 L_2).$$

Ist daher P die Matrix einer orthogonalen Transformation, d. h. wird, wenn P' die Transponierte von P bedeutet, $P'P = PP' = E$, so wird auch

$$(C_m P')(C_m P) = (C_m P)(C_m P') = C_m E = E.$$

Da $C_m P'$ die Transponierte von $C_m P$ ist, so ergibt sich, daß $C_m P$ zugleich mit P eine orthogonale Transformation bestimmt.

[5]) Für endliche Matrizen L stammt diese Bezeichnung von A. Hurwitz, Zur Invariantentheorie, Math. Ann. **45** (1894), S. 381–404.

Geht nun unsere positiv definite Form $A(x)$ vermittels der orthogonalen Transformation P in die Form $B(y)$ über, so wird die Matrix B der neuen Form gleich $P'AP$, demnach

$$C_m B = (C_m P')(C_m A)(C_m P).$$

Hierbei bleibt daher, da $C_m P$ orthogonal ist, die obere Grenze $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m$ von $C_m A$ ungeändert. Gehören also zu B die charakteristischen Zahlen erster Art $\beta_1, \beta_2, \ldots$, so wird für jedes m

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m = \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m.$$

Hieraus folgt aber, da die α_ν, β_ν positiv sind, für jedes ν die Gleichung $\alpha_\nu = \beta_\nu$.

§ 4.

Eine weitere Eigenschaft der charakteristischen Zahlen einer Form.

Es sei wieder $A(x)$ eine beschränkte Form mit den charakteristischen Zahlen $\alpha_\varrho, \alpha_\sigma^*$. Wir betrachten den n-ten „Restabschnitt"

$$A^{(n)}(x) = \sum_{\varkappa,\lambda}^{n,\infty} a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa x_\lambda = A(0, \ldots, 0, x_n, x_{n+1}, \ldots)$$

von $A(x)$. Die zu ihm gehörenden charakteristischen Zahlen bezeichne man mit

$$\alpha_n^{(n)}, \alpha_{n+1}^{(n)}, \ldots \quad \text{und} \quad \alpha_n^{*(n)}, \alpha_{n+1}^{*(n)}, \ldots \qquad (\alpha_\nu^{(1)} = \alpha_\nu, \ \alpha_\nu^{*(1)} = \alpha_\nu^*)$$

und setze noch

$$\mu_n(A) = \alpha_n^{(n)}, \qquad \mu_n^*(A) = \alpha_n^{*(n)}.$$

Diese Zahlen sind nichts anderes als die obere, bzw. die untere Grenze von $A^{(n)}(x)$ unter der Nebenbedingung

$$E^{(n)}(x) = x_n^2 + x_{n+1}^2 + \ldots = 1.$$

Es gilt nun der Satz

IV. *Durchläuft B die Gesamtheit der zu A ähnlichen, d. h. der aus A vermittels orthogonaler Transformationen hervorgehenden Formen, so erscheint für jedes n die Zahl α_n als die untere Grenze aller $\mu_n(B)$ und ebenso α_n^* als die obere Grenze aller $\mu_n^*(B)$.*

Da beim Übergang von A zu $-A$ an Stelle der Zahlen

$$\alpha_n, \quad \mu_n(B), \quad \alpha_n^*, \quad \mu_n^*(B)$$

die Zahlen

$$-\alpha_n^*, \quad -\mu_n^*(B), \quad -\alpha_n, \quad -\mu_n(B)$$

treten, so brauchen wir unseren Satz nur für die Zahlen α_n und $\mu_n(B)$ zu beweisen. Es sei nun

$$\begin{array}{l} \alpha_{nn}^{(n)} \\ \alpha_{n+1,n}^{(n)},\ \alpha_{n+1,n+1}^{(n)} \\ \alpha_{n+2,n}^{(n)},\ \alpha_{n+2,n+1}^{(n)},\ \alpha_{n+2,n+2}^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

das zu $A^{(n)}(x)$ gehörende Schema. Aus dem Satze I folgt dann offenbar für $\nu \geqq n$

$$(10) \qquad \alpha_{\nu n}^{(n)} \geqq \alpha_{\nu,n+1}^{(n+1)} \geqq \alpha_{\nu,n+1}^{(n)} \geqq \alpha_{\nu,n+2}^{(n+1)} \geqq \alpha_{\nu,n+2}^{(n)} \geqq \ldots \geqq \alpha_{\nu\nu}^{(n+1)} \geqq \alpha_{\nu\nu}^{(n)}.$$

Läßt man ν über alle Grenzen wachsen, so wird daher

$$\alpha_n^{(n)} \geqq \alpha_{n+1}^{(n+1)} \geqq \alpha_{n+1}^{(n)} \geqq \alpha_{n+2}^{(n+1)} \geqq \alpha_{n+2}^{(n)} \geqq \ldots.$$

Insbesondere ist also für $\lambda > n$ stets $\alpha_\lambda^{(n)} \leqq \alpha_\lambda^{(n+1)}$, also

$$\alpha_n = \alpha_n^{(1)} \leqq \alpha_n^{(2)} \leqq \alpha_n^{(3)} \leqq \ldots \leqq \alpha_n^{(n)}.$$

Dies liefert aber $\mu_n(A) \geqq \alpha_n$, und beachtet man wieder, daß beim Übergang von A zu B die Zahl α_n nach Satz III ungeändert bleibt, so erhält man auch

$$(11) \qquad \mu_n(B) \geqq \alpha_n.$$

Um nun zu zeigen, daß bei geeigneter Wahl der zu A ähnlichen Form B die Zahl $\mu_n(B)$ dem Wert α_n beliebig nahe gebracht werden kann, schließen wir folgendermaßen. Bleiben wir zunächst noch bei der Form A und betrachten wir für $k > n$ die beiden Formen

$$A_k^{(n)}(x) = \sum_{\varkappa,\lambda}^{k}{}_{n} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda, \qquad A_k^{(n+1)}(x) = \sum_{\varkappa,\lambda}^{k}{}_{n+1} a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda,$$

so wird offenbar in unseren Bezeichnungen

$$\sum_{\varkappa=n}^{k} a_{\varkappa\varkappa} = \alpha_{k,n}^{(n)} + \alpha_{k,n+1}^{(n)} + \ldots + \alpha_{k,k}^{(n)} = a_{nn} + \alpha_{k,n+1}^{(n+1)} + \ldots + \alpha_{k,k}^{(n+1)},$$

also

$$\sum_{\nu=n+1}^{k} [\alpha_{k,\nu}^{(n+1)} - \alpha_{k,\nu}^{(n)}] = \alpha_{k,n}^{(n)} - a_{nn}.$$

Da nun die links auftretenden Differenzen wegen (10) nicht negativ sind, so wird

$$0 \leqq \alpha_{k,\nu}^{(n+1)} - \alpha_{k,\nu}^{(n)} \leqq \alpha_{k,n}^{(n)} - a_{nn}.$$

Hält man hierin ν fest und läßt k über alle Grenzen wachsen, so ergibt sich

$$0 \leqq \alpha_\nu^{(n+1)} - \alpha_\nu^{(n)} \leqq \mu_n(A) - a_{nn}.$$

Bei festem ν folgt hieraus für $n = 1, 2, \ldots, \nu - 1$ durch Addition

$$0 \leqq \mu_\nu(A) - \alpha_\nu \leqq [\mu_1(A) - a_{11}] + \ldots + [\mu_{\nu-1}(A) - a_{\nu-1,\nu-1}].$$

Ersetzt man hierin die Form A durch $B = (b_{\varkappa\lambda})$ und schreibt für ν wieder n, so ergibt sich

$$0 \leqq \mu_n(B) - \alpha_n \leqq [\mu_1(B) - b_{11}] + \ldots + [\mu_{n-1}(B) - b_{n-1,n-1}]. \tag{12}$$

Es sei nun ε eine beliebig kleine positive Größe und

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_{n-1} \qquad (\varepsilon_\lambda > 0). \tag{13}$$

Man wähle jetzt, was jedenfalls möglich ist, eine zu A ähnliche Form $C = (c_{\varkappa\lambda})$, so daß

$$\mu_1(A) - c_{11} = \mu_1(C) - c_{11} < \varepsilon_1$$

wird. Hält man die erste Variable fest, so kann man die übrigen Variablen in der Weise orthogonal transformieren, daß in der neuentstehenden Form $D = (d_{\varkappa\lambda})$

$$\mu_1(D) - d_{11} = \mu_1(C) - c_{11} < \varepsilon_1, \qquad \mu_2(D) - d_{22} < \varepsilon_2$$

wird. Setzt man dieses Verfahren fort, so gelangt man nach $n-1$ Schritten zu einer mit A ähnlichen Form $B = (b_{\varkappa\lambda})$, die gleichzeitig den Bedingungen

$$\mu_1(B) - b_{11} < \varepsilon_1, \qquad \mu_2(B) - b_{22} < \varepsilon_2, \ldots, \qquad \mu_{n-1}(B) - b_{n-1,n-1} < \varepsilon_{n-1}$$

genügt. Aus (12) und (13) folgt dann $\mu_n(B) - \alpha_n < \varepsilon$.

§ 5.

Beweis des Satzes II.

Wir haben zunächst zu beweisen, daß jede beschränkte Form $A(x)$, die den Bedingungen $\alpha = 0$, $\alpha^* = 0$ genügt, vollstetig ist. Haben also $\xi^{(\nu)}$ und ξ dieselbe Bedeutung wie in der Einleitung, so müssen wir zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl N so bestimmen, daß für $\nu > N$

$$-\varepsilon < A(\xi^{(\nu)}) - A(\xi) < \varepsilon \tag{14}$$

wird.

Man wähle nun, was wegen $\lim \alpha_n = 0$ jedenfalls möglich ist, eine feste Zahl n so, daß $\alpha_n < \frac{\varepsilon}{4}$ wird, und bestimme eine orthogonale Transformation

$$x_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{\infty} p_{\varkappa\lambda}\, y_\lambda$$

derart, daß die aus A entstehende Form $B = (b_{\varkappa\lambda})$ der Bedingung

$\mu_n(B) - a_n < \frac{\varepsilon}{4}$ genügt (vgl. Satz IV). Dann wird also $\mu_n(B) < \frac{\varepsilon}{2}$ und folglich für $E(y) \leqq 1$ stets

$$B^{(n)}(y) = \sum_{\varkappa,\lambda}^{\infty} b_{\varkappa\lambda} y_\varkappa y_\lambda < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es wird dann für jedes $m > n$ von selbst auch

$$B^{(m)}(y) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{15}$$

Setzt man nun

$$\eta_\varkappa^{(\nu)} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} p_{\lambda\varkappa} \xi_\lambda^{(\nu)}, \qquad \eta_\varkappa = \sum_{\lambda=1}^{\infty} p_{\lambda\varkappa} \xi_\lambda,$$

so wird noch

$$A(\xi^{(\nu)}) = B(\eta^{(\nu)}), \quad A(\xi) = B(\eta), \quad \lim_{\nu\to\infty} \eta_\varkappa^{(\nu)} = \eta_\varkappa.$$

Da $\sum \eta_\lambda^2$ konvergent und

$$|B^{(m)}(\eta)| < \text{const.} \sum_{\lambda=m}^{\infty} \eta_\lambda^2$$

ist, können wir m noch so wählen, daß

$$|B^{(m)}(\eta)| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{16}$$

wird. Es sei nun

$$B(y) = C^{(m)}(y) + B^{(m)}(y).$$

Die Form

$$C^{(m)}(y) = \sum_{\varkappa,\lambda}^{m} b_{\varkappa\lambda} y_\varkappa y_\lambda + 2 \sum_{\varkappa=1}^{m} y_\varkappa \sum_{\lambda=1}^{\infty} b_{\varkappa\lambda} y_\lambda$$

ist nun gewiß vollstetig, da jede beschränkte Linearform diese Eigenschaft besitzt. Wir können daher N_1 so bestimmen, daß für $\nu > N_1$

$$|C^{(m)}(\eta^{(\nu)}) - C^{(m)}(\eta)| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{17}$$

wird. Aus der für alle Punkte $(y) = (\eta^{(\nu)})$ geltenden Formel (15) folgt aber in Verbindung mit (16) und (17) für $\nu > N_1$

$$\begin{aligned} A(\xi^{(\nu)}) - A(\xi) &= B(\eta^{(\nu)}) - B(\eta) \\ &= [C^{(m)}(\eta^{(\nu)}) - C^{(m)}(\eta)] + B^{(m)}(\eta^{(\nu)}) - B^{(m)}(\eta) \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Betrachtet man nun an Stelle von A die Form $-A$ und benutzt

rst jetzt, daß auch $\alpha^* = 0$ sein soll, so kann man ebenso N_2 so be-immen, daß für $\nu > N_2$

$$-A(\xi^{(\nu)}) + A(\xi) < \varepsilon$$

ird. Für $\nu > \mathrm{Max}(N_1, N_2)$ gelten dann beide Ungleichungen (14).

Damit ist der erste Teil des Satzes II vollständig bewiesen, und ierbei haben wir vom Begriff des Spektrums der Form $A(x)$ keinen ebrauch gemacht. Auch der Hilbertsche Hauptsatz über vollstetige ormen ist bis jetzt noch nicht benutzt worden. Wir bedienen uns aber einer, um umgekehrt zu zeigen, daß für eine vollstetige Form $A(x)$ ets $\alpha = \alpha^* = 0$ sein muß. Dies ergibt sich am einfachsten mit Hilfe es Satzes IV, wobei sogar nur von der Ungleichung (11) und der aus ir folgenden Ungleichung $\mu_n^*(B) \leqq \alpha_n^*$ Gebrauch gemacht wird. Ist ämlich

$$B(y) = \omega_1 y_1^2 + \omega_2 y_2^2 + \ldots$$

ie Hilbertsche Normalform der gegebenen vollstetigen Form $A(x)$, so ird wegen $\lim \omega_n = 0$ in den Bezeichnungen des § 4

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(B) = \lim_{n\to\infty} \mu_n^*(B) = 0$$

nd hieraus folgt wegen

$$\mu_n(B) \geqq \alpha_n \geqq \alpha \geqq \alpha^* \geqq \alpha_n^* \geqq \mu_n^*(B),$$

aß $\alpha = \alpha^* = 0$ sein muß.

Man kann aber auch etwas anders zum Ziele gelangen: Um die haraktеristischen Zahlen α_ϱ, α_σ^* der Form $A(x)$ zu berechnen, kann man ch nach Satz III an Stelle von $A(x)$ der zugehörigen Normalform $B(y)$ edienen. Für diese Form sind aber die charakteristischen Wurzeln des -ten Abschnitts einfach die Größen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Man kennt also as zu $B(y)$ gehörende Dreiecksschema und eine einfache Betrachtung ehrt, daß *die von Null verschiedenen unter den Zahlen* α_ϱ, α_σ^* *mit den on Null verschiedenen unter den Hilbertschen reziproken Eigenwerten* $_n$ *übereinstimmen*. Wegen $\lim \omega_n = 0$ liefert dies wieder $\alpha = \alpha^* = 0$.

(Eingegangen am 7. August 1921.)

Über die Darstellung der Lehre vom Inhalt in der Integralrechnung.

Von

Erhard Schmidt in Berlin.

Einleitung.

Den Gegenstand dieser Ausführungen bildet eine kleine Schwierigkeit, welche bei der üblichen Darstellung des Volumenbegriffs als Grundlage der Theorie der vielfachen Integrale auftritt. Ich lege dabei das Riemannsche Integral zugrunde, obgleich sich die Bemerkung auch auf das Lebesguesche bezieht. Ebenso beschränke ich mich im Interesse der Durchsichtigkeit auf zwei Dimensionen, doch besitzen alle Ausführungen für n Dimensionen unveränderte Gültigkeit.

Die übliche Definition des äußeren und inneren Inhaltes einer beschränkten Punktmenge P ist bis auf unwesentliche Abweichungen folgende:

Man zerlege die Ebene durch Parallelen zu den Koordinatenachsen in ein Quadratnetz von der Seitenlänge a. Es bezeichne α die Anzahl derjenigen Quadrate, welche überhaupt Punkte von P enthalten, β die Anzahl derjenigen, welche nur aus Punkten von P bestehen. Dann ist zunächst

$$\alpha a^2 \geqq \beta a^2. \tag{1}$$

Man definiert nun den äußeren Inhalt $\bar{J}(P)$ als die untere Grenze von αa^2 für alle möglichen derartigen Quadratnetze und den inneren Inhalt $\underline{J}(P)$ als die obere Grenze von βa^2. Aus (1) ergibt sich dann leicht, daß

$$\bar{J}(P) \geqq \underline{J}(P) \tag{2}$$

ist.

Die erwähnte Schwierigkeit besteht nun in dem Nachweis der Unabhängigkeit des so definierten äußeren und inneren Inhaltes von der Wahl des Koordinatensystems, oder mit anderen Worten in dem Nachweis der Inhaltsgleichheit kongruenter Punktmengen. Dieser Beweis ist leicht,

enn die einfachsten Tatsachen der elementargeometrischen Lehre vom nhalt geradlinig begrenzter Figuren vorausgesetzt werden. Es handelt ch dabei insbesondere um den Satz: Wird ein System von β nicht ereinandergreifenden Quadraten mit der Seitenlänge b von einem System on α Quadraten mit der Seitenlänge a überdeckt, so ist $\alpha a^2 \geqq \beta b^2$.

Eine saubere Entwicklung der elementargeometrischen Inhaltslehre, sbesondere bei der hier notwendigen Verallgemeinerung auf drei und ehr Dimensionen, dürfte aber die Begründung der Integralrechnung höchst nständlich gestalten — ganz abgesehen von der aus dem Bedürfnis nach inheitlichkeit erwachsenden Forderung, daß die Begründung der Theorie er vielfachen Integrale gleichzeitig einen independenten Aufbau der In-altslehre liefere.

Der zunächst sich darbietende Gedanke, die Invarianz dadurch sicher-ustellen, daß der äußere und innere Inhalt von vornherein als untere renze von αa^2 und obere Grenze von βa^2 für alle möglichen — also icht bloß den Koordinatenachsen parallel orientierten — Quadratnetze efiniert werden, verschiebt nur die Schwierigkeit auf den nunmehr zu rbringenden Beweis der Ungleichung (2). Dagegen ist diese Ungleichung atürlich eine unmittelbare Konsequenz des obenerwähnten Satzes der ementargeometrischen Inhaltslehre.

Der Schwierigkeit entgeht auch das folgende, von einigen Autoren ngeschlagene elegante Verfahren nicht:

Man leite zunächst bloß den Begriff des Doppelintegrals über ein uadratisches Gebiet her und definiere dann den äußeren und inneren nhalt der Punktmenge P, indem man sie mit einem Quadrat überdeckt nd über dieses das obere und untere Integral derjenigen Funktion bildet, elche für alle Punkte von P gleich Eins und für alle übrigen Punkte leich Null ist.

Denn nun handelt es sich um den Nachweis der Unabhängigkeit des definierten Inhaltes von der Wahl des Überdeckungsquadrates.

Um die Schwierigkeit zu überwinden, könnte folgender Weg ein-eschlagen werden.

Man definiert den Inhalt vorläufig in bezug auf ein Koordinaten-ystem xy und leitet auf dieser Grundlage die Theorie der Doppelintegrale er, namentlich ihre Berechnung durch sukzessive Integration nach x nd y. Dann läßt sich der zu führende Invarianzbeweis, wie leicht er-chtlich, auf den Nachweis reduzieren, daß der obige in bezug auf das oordinatensystem xy definierte Inhalt eines beliebig orientierten Qua-rates von der Seite 1 gleich 1 ist. Das kann durch effektive Ausrech-ung des Doppelintegrals mittels sukzessiver Integration nach x und y

geschehen. Diese Rechnung ist bei zwei Dimensionen leicht durchzuführen, gestaltet sich aber bei steigender Dimensionenzahl höchst lästig.

In der mustergültigen und eleganten Darstellung von Carathéodory in seinen „Vorlesungen über reelle Funktionen" wird der Inhalt ebenfalls vorläufig in bezug auf ein Koordinatensystem definiert. Der Beweis der Invarianz wird dann geführt, indem durch eine Reihe von einfachen Transformationen unter Heranziehung der Determinantentheorie die bekannte Determinantenformel für den Inhalt eines Parallelepipedons hergeleitet wird. Aus dieser folgt dann, daß der Inhalt eines beliebig orientierten Würfels von der Kante 1 gleich 1 ist.

Ich möchte im folgenden eine, wie mir scheint, sehr einfache independente Darstellung der Inhaltslehre auseinandersetzen, die sich ohne jede Weiterung auf n Dimensionen übertragen läßt.

§ 1.

Elementargeometrische Hilfssätze.

Es mögen β nicht übereinandergreifende Quadrate mit den Seiten $b_1, b_2, \ldots, b_\beta$ von einem Quadrat mit der Seite a überdeckt werden. Dann ist

$$a^2 \geqq \sum_1^\beta{}_\nu\, b_\nu^2. \tag{3}$$

Beweis. Zerlegt man zunächst ein Rechteck durch eine im Innern verlaufende Parallele zu einer Seite, so folgt aus dem distributiven Gesetz der Multiplikation, daß das Seitenprodukt des ganzen Rechtecks gleich der Summe der Seitenprodukte der beiden Teilrechtecke ist. Durch Wiederholung dieses Schlusses ergibt sich leicht, daß, wenn ein Rechteck durch endlich viele im Innern verlaufende Parallelen zu den Seiten in Teilrechtecke zerlegt wird, das Seitenprodukt des ganzen Rechtecks gleich der Summe der Seitenprodukte der Teilrechtecke ist.

Sind nun die gegebenen inneren Quadrate b_ν zu dem äußeren Quadrat a parallel gelegen, so ist die zu beweisende Behauptung trivial.

Denn verlängert man die Seiten der inneren Quadrate bis zu ihrem Schnittpunkt mit dem äußeren, so zerfallen sämtliche Quadrate in Teilrechtecke. Gemäß dem eben Ausgeführten wird dabei a^2 gleich der Summe der Seitenprodukte sämtlicher Teilrechtecke, während für jedes innere Quadrat b_ν^2 gleich der Summe der Seitenprodukte derjenigen Rechtecke wird, in welche es zerfällt. Da nun keine zwei inneren Quadrate ein Teilrechteck gemein haben, so folgt die zu beweisende Behauptung.

Im allgemeinen Falle konstruiere man in jedem Quadrate b_ν ein kon-
ıtrisches, zum Quadrat a paralleles Quadrat mit der Seite c_ν:

$$c_\nu = \frac{b_\nu}{\sqrt{2}}.$$

ı jedes Quadrat c_ν vom entsprechenden Quadrat b_ν überdeckt wird, so
ıält man jetzt β nicht übereinandergreifende Quadrate c_ν, welche vom
ıadrate a überdeckt werden und diesem parallel sind. Also ist gemäß
m eben Ausgeführten

$$a^2 \geqq \sum_1^\beta{}_\nu c_\nu^2 = \sum_1^\beta{}_\nu \frac{b_\nu^2}{2}.$$

zeichnet man den Quotienten

$$\frac{\sum_1^\beta{}_\nu b_\nu^2}{a^2}$$

; die Verhältniszahl der aus den Quadraten b_ν und dem sie überdecken-
n Quadrat a gebildeten Figur, so liefert uns also die Ungleichung (5)
r die Verhältniszahl die vorläufige obere Schranke 2.

Man betrachte nun wieder die ursprüngliche, aus dem äußeren Qua-
ate a und den β inneren Quadraten b_ν bestehende Figur. Man kon-
ruiere in jedem Quadrate b_ν β neue Quadrate mit den Seiten $b_{\nu 1}, b_{\nu 2}$,
., $b_{\nu\beta}$, so daß die aus dem Quadrate b_ν und den Quadraten $b_{\nu 1}, b_{\nu 2}$,
., $b_{\nu\beta}$ bestehende Figur der ursprünglichen, aus dem Quadrate a und
n Quadraten $b_1, b_2, \ldots, b_\beta$ gebildeten ähnlich wird. Setzt man nun

$$\frac{\sum_1^\beta{}_\nu b_\nu^2}{a^2} = q,$$

wird

$$\frac{\sum_1^\beta{}_\varrho b_{\nu\varrho}^2}{b_\nu^2} = q, \qquad \frac{\sum_1^\beta{}_{\nu,\varrho} b_{\nu\varrho}^2}{a^2} = q^2.$$

a nun die neuen Quadrate $b_{\nu\varrho}$ ebenfalls nicht übereinandergreifen und
ım Quadrate a überdeckt werden, so liefert die letzte Gleichung das
rgebnis, daß zu jeder den Voraussetzungen des Satzes I genügenden Figur
it der Verhältniszahl q eine denselben Voraussetzungen genügende Figur
it der Verhältniszahl q^2 konstruiert werden kann.

Wiederholt man diese Konstruktion k mal, so erhält man eine den
oraussetzungen des Satzes I genügende Figur mit der Verhältniszahl q^{2^k}.

Da, wie oben bewiesen, 2 eine obere Schranke für die Verhältniszahlen bildet, so ist also

$$q^{2^k} \leqq 2.$$

Da endlich diese Ungleichung für beliebig große Werte von k gilt, so folgt

$$q \leqq 1,$$

w. z. b. w.

Der Beweis dieses Satzes für m Dimensionen ist offenbar genau derselbe, nur daß die Gleichung (4)

$$c_\nu = \frac{b_\nu}{\sqrt{m}}$$

lauten muß, und dementsprechend als vorläufige obere Schranke sich statt der Zahl 2 die Zahl $(\sqrt{m})^m$ ergibt.

Wir verallgemeinern diesen Satz zum Satze

II. Es mögen β nicht übereinandergreifende Quadrate mit den Seiten $b_1, b_2, \ldots, b_\beta$ von der Gesamtheit von α Quadraten mit den Seiten $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ überdeckt werden. Letztere Quadrate dürfen also auch insbesondere übereinandergreifen. Dann ist

$$\sum_1^\alpha{}_\mu a_\mu^2 \geqq \sum_1^\beta{}_\nu b_\nu^2. \tag{6}$$

Beweis. Wird jedes Quadrat b_ν von mindestens einem Quadrate a_μ völlig überdeckt, so ist die Behauptung trivial. Denn sie ergibt sich durch Anwendung des Satzes I auf jedes Quadrat a_μ und die von ihm völlig überdeckten Quadrate b_ν a fortiori.

Im allgemeinen Falle konstruiere man um jedes Quadrat a_μ ein konzentrisches, paralleles mit der Seite $a'_\mu = a_\mu + 2\delta$. Man zerlege ferner jedes Quadrat b_ν durch Parallelen zu den Seiten in k_ν^2 Teilquadrate mit den Seiten $\frac{b_\nu}{k_\nu}$, wo k_ν so groß gewählt wird, daß die Diagonalen dieser Teilquadrate kleiner als δ werden. Dann wird jedes Teilquadrat von mindestens einem Quadrat a'_μ völlig überdeckt. Denn, da es von der Gesamtheit der Quadrate a_μ überdeckt wird, muß es mit mindestens einem dieser, etwa a_ϱ, einen Punkt gemein haben. Von dem konzentrischen Quadrat a'_ϱ wird es dann völlig überdeckt.

Gemäß der Bemerkung am Anfang dieses Beweises ist daher

$$\sum_1^\alpha{}_\mu a_\mu'^2 \geqq \sum_1^\beta{}_\nu k_\nu^2 \left(\frac{b_\nu}{k_\nu}\right)^2 = \sum_1^\beta{}_\nu b_\nu^2.$$

Läßt man jetzt δ verschwinden, so ergibt sich die zu beweisende Ungleichung (6).

Der Beweis dieses Satzes für m Dimensionen ist offenbar genau
rselbe.

§ 2.

Die Definition des Inhaltes [1]).

Es sei in der Ebene eine beschränkte Punktmenge P gegeben.

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ die Seiten eines beliebigen P überdeckenden
dlichen Systems von Quadraten, die also insbesondere auch übereinander-
eifen dürfen. Unter dem äußeren Inhalt $\bar{J}(P)$ der Punktmenge ver-
ehen wir die untere Grenze der Summe

)
$$\sum_1^{\alpha}{}_{\mu} a_\mu^2$$

r die Gesamtheit aller solcher Systeme.

Es seien $b_1, b_2, \ldots, b_\beta$ die Seiten eines beliebigen von P überdeckten
dlichen Systems nicht übereinandergreifender Quadrate. Unter dem
neren Inhalt $\underline{J}(P)$ der Punktmenge verstehen wir die obere Grenze der
mme

)
$$\sum_1^{\beta}{}_{\nu} b_\nu^2$$

r die Gesamtheit aller solcher Systeme.

Ist der äußere Inhalt gleich dem inneren, so sagt man, die Punkt-
enge hat einen bestimmten Inhalt und bezeichnet ihn mit $J(P)$.

III. Da jedes System (8) von jedem System (7) überdeckt wird, so
lgt aus II

)
$$\bar{J}(P) \geqq \underline{J}(P).$$

Ferner ergeben sich aus der Definition unmittelbar folgende Tatsachen:

IV. Kongruente Punktmengen haben miteinander einen gleichen äußeren
d inneren Inhalt.

V. Ist die Punktmenge Q in P enthalten, so ist

0)
$$\bar{J}(Q) \leqq \bar{J}(P),$$

1)
$$\underline{J}(Q) \leqq \underline{J}(P).$$

VI. Unter der Vereinigungsmenge der Punktmengen $P_1, P_2, \ldots, P_n$
rstehe man die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche einer der Punkt-

[1]) Die in diesem und in den folgenden Paragraphen auseinandergesetzten Defi-
ionen und Sätze sind natürlich sämtlich bekannt. Ich muß sie nur mit ihren Be-
isen wiedergeben, um zu zeigen, wie sich der Aufbau der Inhaltslehre auf Grund
· Hilfssätze des § 1 durchführen läßt.

mengen P_ν angehören. Man bezeichne sie mit $\sum_1^n P_\nu$ und setze, wie in diesen Ausführungen durchweg geschieht, voraus, daß die Punktmengen P_ν beschränkt sind. Dann ergibt sich aus der Definition des äußeren Inhaltes unmittelbar:

$$J\sum_1^n P_\nu \leqq \sum_1^n \bar{J}(P_\nu). \tag{12}$$

Man verstehe unter einem inneren Punkt einer Punktmenge einen solchen Punkt, um welchen als Zentrum sich ein Kreis beschreiben läßt, dessen Inneres nur aus Punkten der Punktmenge besteht. Dann ergibt sich aus der Definition des inneren Inhaltes unmittelbar:

Haben keine zwei der beschränkten Punktmengen $P_1, P_2, \ldots, P_n$ einen inneren Punkt gemein, so ist

$$\underline{J}\sum_1^n P_\nu \geqq \sum_1^n \underline{J}(P). \tag{13}$$

Es mögen endlich noch die Punktmengen P_ν einen bestimmten Inhalt haben, d. h. die Gleichungen bestehen:

$$\bar{J}(P_\nu) = \underline{J}(P_\nu) = J(P_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

Dann folgt aus (9), (12), (13), (14), daß auch die Vereinigungsmenge einen bestimmten Inhalt hat, und daß

$$J\sum_1^n P_\nu = \sum_1^n J(P_\nu) \tag{15}$$

ist.

VII. Bezeichnet R ein Rechteck mit den Seiten p und q, so ist

$$\bar{J}(R) = \underline{J}(R) = J(R) = p \cdot q. \tag{16}$$

Beweis. Man wähle $q' > q$ und zu p kommensurabel. Es sei also

$$\frac{p}{r'} = \frac{q'}{s'},$$

wo r' und s' ganze Zahlen bedeuten. Man zerlege das verlängerte Rechteck mit den Seiten p und q' durch Parallelen zu den Seiten in $r' \cdot s'$ Teilquadrate mit der Seite $\frac{p}{r'} = \frac{q'}{s'}$. Dann bilden diese Teilquadrate ein R überdeckendes Quadratsystem (7). Mithin ist

$$\bar{J}(R) \leqq r' \cdot s' \cdot \left(\frac{p}{r'}\right)^2 = p \cdot q'. \tag{17}$$

Man wähle ferner $q'' < q$ und zu p kommensurabel. Es sei also

$$\frac{p}{r''} = \frac{q''}{s''},$$

wo r'' und s'' ganze Zahlen bedeuten. Man zerlege das verkürzte Rechteck mit den Seiten p und q'' durch Parallelen zu den Seiten in $r'' \cdot s'$ Teilquadrate mit der Seite $\frac{p}{r''} = \frac{q''}{s''}$. Dann bilden diese Teilquadrate ein von R überdecktes nicht übereinandergreifendes Quadratsystem (8). Mithin ist

$$\underline{J}(R) \geqq r'' \cdot s'' \cdot \left(\frac{p}{r''}\right)^2 = p\,q''. \tag{18}$$

Aus (9), (17), (18) folgt

$$p\,q' \geqq \bar{J}(R) \geqq \underline{J}(R) \geqq p\,q''.$$

Da man nun q' und q'' beliebig nahe an q wählen kann, so ergibt sich hieraus die Gleichung (16), w. z. b. w.

Alle diese Definitionen, Sätze und Beweise bleiben offenbar bei der Verallgemeinerung auf beliebig viele Dimensionen mutatis mutandis ohne jede Weiterung bestehen. Handelt es sich etwa um den im dreidimensionalen Raume dem letzten Theorem entsprechenden Satz, daß ein rechtwinkliges Parallelepipedon mit den Kanten $p\,q\,l$ einen bestimmten, dem Produkt der drei Kanten gleichen Inhalt hat, so müssen beim Beweise natürlich die Größen $q'\,l'\,q''\,l''$ so gewählt werden, daß sie zu p kommensurabel sind und den Ungleichungen genügen:

$$q' \geqq q \geqq q'', \qquad l' \geqq l \geqq l''.$$

Dann lassen sich die ganzen Zahlen $r'\,s'\,t'\,r''\,s''\,t''$ so bestimmen, daß die Gleichungen

$$\frac{p}{r'} = \frac{q'}{s'} = \frac{l'}{t'}, \qquad \frac{p}{r''} = \frac{q''}{s''} = \frac{l''}{t''}$$

gelten. Sonst verläuft der Beweis genau wie im zweidimensionalen Falle.

VIII. Es bezeichne $\{P\}_\varepsilon$ die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche von Punkten der beschränkten Punktmenge P um weniger als ε entfernt sind. Dann ist

$$\lim_{\varepsilon=0} \bar{J}\{P\}_\varepsilon = \bar{J}(P), \tag{19}$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \underline{J}\{P\}_\varepsilon = \bar{J}(P). \tag{20}$$

Beweis. Zunächst ist offenbar P in $\{P\}_\varepsilon$ enthalten, und, wenn $\varepsilon' < \varepsilon$ ist, auch $\{P\}_{\varepsilon'}$ in $\{P\}_\varepsilon$. Also nimmt gemäß V $\bar{J}\{P\}_\varepsilon$ mit fallendem ε nicht zu, und es ist

$$\lim_{\varepsilon=0} \bar{J}\{P\}_\varepsilon \geqq \bar{J}(P), \tag{21}$$

wo der Grenzwert auf der linken Seite jedenfalls existiert.

Es seien nun $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ die Seiten eines P überdeckenden Quadratsystems. Man konstruiere um jedes dieser Quadrate a_μ ein konzentrisches paralleles mit der Seite $a'_\mu > a_\mu$. Für

$$\varepsilon < \frac{a'_\mu - a_\mu}{2} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, \alpha)$$

wird dann $\{P\}_\varepsilon$ offenbar vom System der Quadrate a'_μ überdeckt. Mithin ist dann gemäß der Definitionseigenschaft des äußeren Inhaltes

$$\bar{J}\{P\}_\varepsilon \leqq \sum_1^\alpha {}_\mu a'^2_\mu.$$

Also ist

$$\lim_{\varepsilon=0} \bar{J}\{P\}_\varepsilon \leqq \sum_1^\alpha {}_\mu a'^2_\mu,$$

und da diese Ungleichung für beliebige $a'_\mu > a_\mu$ gilt,

$$\lim_{\varepsilon=0} \bar{J}\{P\}_\varepsilon \leqq \sum_1^\alpha {}_\mu a^2_\mu.$$

Da endlich die letzte Ungleichung für jedes P überdeckendes Quadratsystem mit den Seiten a_μ zutrifft, so ergibt sich aus der Definitionseigenschaft des äußeren Inhaltes

$$\lim_{\varepsilon=0} \bar{J}\{P\}_\varepsilon \leqq \bar{J}(P),$$

woraus in Verbindung mit (21) die zu beweisende Gleichung (19) folgt.

Die Gleichung (20) folgt aus (19) a fortiori, wenn noch die Ungleichung

$$\underline{J}\{P\}_\varepsilon \geqq \bar{J}(P) \tag{22}$$

herangezogen wird, die sich folgendermaßen ergibt.

Man überdecke die Ebene mit einem Quadratnetz, dessen Diagonalen $< \varepsilon$ sind. Es bedeute c die Seitenlänge der Quadrate und n die Anzahl derjenigen Quadrate, welche Punkte von P enthalten. Dann überdeckt letzteres System P und wird seinerseits von $\{P\}_\varepsilon$ überdeckt. Also ist gemäß der Definitionseigenschaft des äußeren und inneren Inhaltes

$$nc^2 \geqq \bar{J}(P), \qquad nc^2 \leqq \underline{J}\{P\}_\varepsilon,$$

woraus die allein noch zu beweisende Ungleichung (22) folgt.

IX. Man bezeichne als Komplementärmenge $\bar{P}$ der Punktmenge P die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche nicht zu P gehören. Als Be-

ndung von P definiere man die Gesamtheit G derjenigen Punkte, welche eder innere Punkte von P noch innere Punkte von $\bar{P}$ sind. Über die ugehörigkeit der Randpunkte G zur Punktmenge P wird keine Voraus-tzung gemacht.

Da ein Häufungspunkt von G weder innerer Punkt von P noch nerer Punkt von $\bar{P}$ sein kann, so muß jeder Häufungspunkt von G zu G hören, d. h. die Berandung G ist eine abgeschlossene Punktmenge.

X. Gehört der Punkt A zur Punktmenge P und der Punkt A' nicht, liegt auf der Strecke AA' mindestens ein Punkt der Berandung.

Denn ist ϱ die untere Grenze der Entfernungen des Punktes A von en auf der Strecke AA' gelegenen, nicht zu P gehörigen Punkten, so hört der auf der Strecke AA' in der Entfernung ϱ von A liegende unkt offenbar G an.

Hieraus ergibt sich leicht die folgende Verallgemeinerung.

Sind der zu P gehörige Punkt A und der nicht zu P gehörige Punkt A' rch einen Streckenzug mit den Ecken $BCDEF\ldots$ verbunden, so liegt ch auf diesem mindestens ein Punkt der Berandung. Denn ist etwa F e erste nicht zu P gehörige Ecke, so gehört die vorhergehende Ecke E P, und es muß daher, wie eben gezeigt, auf der Strecke EF min-stens ein Punkt der Berandung liegen.

XI. Es bezeichne $[P]_\varepsilon$ die Gesamtheit derjenigen Punkte der be-hränkten Punktmenge P, welche von jedem Punkte der Berandung G n mindestens ε entfernt sind. Dann ist

3) $$\lim_{\varepsilon=0} \underline{J}[P]_\varepsilon = \underline{J}(P),$$

4) $$\lim_{\varepsilon=0} \bar{J}[P]_\varepsilon = \underline{J}(P).$$

Beweis. Zunächst ist offenbar $[P]_\varepsilon$ in P enthalten, und für $\varepsilon' < \varepsilon$ ch $[P]_\varepsilon$ in $[P]_{\varepsilon'}$. Gemäß V nimmt also $\underline{J}[P]_\varepsilon$ mit fallendem ε nicht , und es ist

5) $$\lim_{\varepsilon=0} \underline{J}[P]_\varepsilon \leqq \underline{J}(P),$$

der Grenzwert auf der linken Seite jedenfalls existiert.

Es seien nun $b_1, b_2, \ldots, b_\beta$ die Seiten eines von P überdeckten nicht ereinandergreifenden Quadratsystems. Man konstruiere in jedem Qua-ate b_ν ein konzentrisches paralleles mit der Seite $b_\nu' < b_\nu$. Für

$$\varepsilon < \frac{b_\nu - b_\nu'}{2} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \beta)$$

rd dann das nicht übereinandergreifende Quadratsystem b_ν' offenbar von

$[P]_\varepsilon$ überdeckt. Mithin ist dann gemäß der Definitionseigenschaft des inneren Inhaltes

$$\underline{J}\,[P]_\varepsilon \geqq \sum_1^\beta{}_\nu\, b_\nu'^2.$$

Also ist

$$\lim_{\varepsilon=0} \underline{J}\,[P]_\varepsilon \geqq \sum_1^\beta{}_\nu\, b_\nu'^2,$$

und da diese Ungleichung für beliebige $b_\nu' < b_\nu$ gilt,

$$\lim_{\varepsilon=0} \underline{J}\,[P]_\varepsilon \geqq \sum_1^\beta{}_\nu\, b_\nu^2.$$

Da endlich die letzte Ungleichung für jedes von P überdeckte System nicht übereinandergreifender Quadrate b_ν zutrifft, so ergibt sich aus der Definitionseigenschaft des inneren Inhaltes

$$\lim_{\varepsilon=0} \underline{J}\,[P]_\varepsilon \geqq \underline{J}\,(P),$$

woraus in Verbindung mit (25) die zu beweisende Gleichung (23) folgt.

Die Gleichung (24) folgt aus (23) a fortiori, wenn noch die Ungleichung

$$\bar{J}\,[P]_\varepsilon \leqq \underline{J}\,(P) \tag{26}$$

herausgezogen wird, die sich folgendermaßen ergibt.

Man überdecke die Ebene mit einem Quadratnetz, dessen Diagonalen $< \varepsilon$ sind. Es bedeute c die Seitenlänge der Quadrate und n die Anzahl derjenigen Quadrate, welche Punkte von $[P]$ enthalten. Da nun keines dieser Quadrate Punkte von G enthalten kann, so muß wegen X jedes nur aus Punkten von P bestehen. Also ist gemäß der Definitionseigenschaft des äußeren und inneren Inhaltes $\bar{J}\,[P]_\varepsilon \leqq n\,c^2$, $\underline{J}\,(P) \geqq n\,c^2$, woraus die allein noch zu beweisende Ungleichung (26) folgt.

XII. Es bezeichne wie oben P eine beschränkte Punktmenge und G ihre Berandung, wobei darüber, inwieweit die Punkte von G der Punktmenge P angehören oder nicht, keine Voraussetzung gemacht werde. Dann ist

$$J\,(P) = \underline{J}\,(P) + \bar{J}\,(G). \tag{27}$$

Beweis. Aus der Definition folgt zunächst unmittelbar, daß $[P]_\varepsilon$ und $\{G\}_\varepsilon$ keinen gemeinsamen Punkt haben.

Es ist ferner

$$[P]_\varepsilon + \{G\}_\varepsilon = \{P\}_\varepsilon. \tag{28}$$

enn daß jeder Punkt einer der beiden Punktmengen auf der linken eite, auch der Punktmenge auf der rechten Seite angehört, leuchtet unittelbar ein. Andererseits gehört jeder Punkt von P offenbar zu $[P]_\varepsilon$ der $\{G\}_\varepsilon$. Um einzusehen, daß dasselbe auch für jeden Punkt A von $P\}_\varepsilon$ gilt, bleibt also nur noch der Fall zu erledigen, daß A nicht zu P ehört. Dann gibt es aber in P einen Punkt B, von dem A um weniger s ε entfernt ist. Also muß gemäß X auf der Strecke AB ein Punkt on G liegen, der von A um weniger als ε entfernt ist, und mithin muß zu $\{G\}_\varepsilon$ gehören.

Aus (28) folgt gemäß (12), (13)

$$\bar{J}\{P\}_\varepsilon \leqq \bar{J}[P]_\varepsilon + \bar{J}\{G\}_\varepsilon,$$
$$\underline{J}\{P\}_\varepsilon \geqq \underline{J}[P]_\varepsilon + \underline{J}\{G\}_\varepsilon.$$

äßt man in diesen Gleichungen ε verschwinden, so ergibt sich aus (19), 0), (23), (24) die zu beweisende Gleichung (27).

XIII. Es seien endlich viele beschränkte Punktmengen $P_1, P_2, \ldots, P_n$ egeben. Man bezeichne mit S ihre Vereinigungsmenge und mit D ihren urchschnitt, d. h. die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche allen Punktengen $P_1, P_2, \ldots, P_n$ gemein sind.

Hat dann jede der Punktmengen P_ν einen bestimmten Inhalt, so lt dasselbe auch von ihrem Durchschnitt D und von ihrer Vereinigungsenge S.

Beweis. Man bezeichne mit $\bar{P}_\nu \bar{D} \bar{S}$ die Komplementärmengen und it $G_\nu G_D G_S$ die Berandungen der Punktmengen $P_\nu D S$.

Ist nun A ein Punkt von G_D, so kann A nicht innerer Punkt von mtlichen P_ν sein, weil sonst A auch innerer Punkt von D sein müßte. s sei also etwa P_ϱ eine Punktmenge, zu deren inneren Punkten A nicht hört. A kann aber auch nicht innerer Punkt von $\bar{P}_\varrho$ sein, weil A nst offenbar auch innerer Punkt von $\bar{D}$ sein müßte. Also muß A zu gehören. Damit ist also gezeigt, daß G_D in der Vereinigungsmenge $\sum_1^n G_\nu$ enthalten ist. Hieraus folgt gemäß (12)

$$\bar{J}(G_D) \leqq \sum_1^n \bar{J}(G_\nu).$$

f Grund der Voraussetzung, daß jede der Punktmengen P_ν einen bemmten Inhalt hat, verschwinden nun gemäß Satz XII sämtliche Sumanden $\bar{J}(G_\nu)$. Daraus folgt das Verschwinden von $\bar{J}(G_D)$ und damit eder gemäß Satz XII die zu beweisende Behauptung über den Durchnitt D.

Ist andererseits A ein Punkt von G_S, so kann A nicht innerer Punkt von sämtlichen $\bar{P}_\nu$ sein, weil sonst A auch innerer Punkt von $\bar{S}$ sein müßte. Es sei also $\bar{P}_\varrho$ eine der Komplementärpunktmengen, zu deren inneren Punkten A nicht gehört. A kann aber auch nicht innerer Punkt von P_ϱ sein, weil A sonst offenbar auch innerer Punkt von S sein müßte. Also muß A zu G_ϱ gehören. Damit ist also gezeigt, daß G_S in der Vereinigungsmenge $\sum_1^n{}_\nu G_\nu$ enthalten ist, woraus wie oben die zu beweisende Behauptung über S folgt.

XIV. Ist Q eine beschränkte auf einer Geraden gelegene Punktmenge, so läßt sich Q in ein Rechteck von beliebig kleinem Seitenprodukt einbetten. Wegen V und VII ist dann also

$$\bar{J}(Q) = 0.$$

Dasselbe gilt wegen (12) auch für jede auf einer endlichen Anzahl von Geraden verteilte beschränkte Punktmenge Q.

XV. Aus dem letzten Satz in Verbindung mit XII folgt: Jede beschränkte Punktmenge, deren Berandung auf einer endlichen Anzahl von Geraden liegt, hat einen bestimmten Inhalt.

Alle diese Sätze und Beweise bleiben bei der Verallgemeinerung auf beliebig viele Dimensionen ohne jede Weiterung mutatis mutandis bestehen. So heißt der letzte Satz für den Raum:

XVI. Jede beschränkte Punktmenge im Raum, deren Berandung auf einer endlichen Anzahl von Ebenen liegt, hat einen bestimmten Inhalt.

XVII. Nunmehr soll ein Satz hergeleitet werden, der zur Berechnung des äußeren und inneren Inhaltes einer beschränkten Punktmenge P oft angewendet wird.

Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß folgendes erfüllt ist:

Es sei ein System von endlich vielen Punktmengen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\alpha$ gegeben, das den nachstehenden Bedingungen genügt.

a) In jeder Punktmenge σ_ν ist die obere Grenze der Entfernungen irgend zweier Punkte $< \varepsilon$.

b) Die Punktmenge P wird von der Vereinigungsmenge $\sum_1^\alpha{}_\nu \sigma_\nu$ überdeckt.

c) Jede Punktmenge σ_ν enthält mindestens einen Punkt von P.

d) Keine zwei verschiedenen Punktmengen σ_ν haben einen inneren Punkt gemein.

e) Jede der Punktmengen σ_ν hat einen bestimmten Inhalt.

Dann ist

$$\delta \geqq \sum_{1}^{\alpha}{}_{\nu} J(\sigma_\nu) - J(P) \geqq 0, \tag{29}$$

$$\delta \geqq \underline{J}(P) - \sum_{\nu}{}' J(\sigma_\nu) \geqq 0, \tag{30}$$

o die zweite Summe nur über alle diejenigen σ_ν zu erstrecken ist, welche us Punkten von P bestehen.

Beweis. Aus d) und e) folgt zunächst wegen VI (14)

$$\bar{J} \sum_{1}^{\alpha}{}_{\nu} \sigma_\nu = \underline{J} \sum_{1}^{\alpha}{}_{\nu} \sigma_\nu = \sum_{1}^{\alpha}{}_{\nu} J(\sigma_\nu), \tag{31}$$

$$\bar{J} \sum_{\nu}{}' \sigma_\nu = \underline{J} \sum_{\nu}{}' \sigma_\nu = \sum_{\nu}{}' J(\sigma_\nu). \tag{32}$$

Nun ist wegen b) und V

$$\bar{J} \sum_{1}^{\alpha}{}_{\nu} \sigma_\nu \geqq J(P).$$

ndererseits wird wegen c) und a) $\sum_{1}^{\alpha}{}_{\nu} \sigma_\nu$ von $\{P\}_\varepsilon$ überdeckt. Es ist aher wegen V

$$\bar{J} \sum_{1}^{\alpha}{}_{\nu} \sigma_\nu \leqq \bar{J}\{P\}_\varepsilon.$$

us den beiden letzten Ungleichungen und (31) ergibt sich

$$\bar{J}\{P\}_\varepsilon \geqq \sum_{1}^{\alpha}{}_{\nu} J(\sigma_\nu) \geqq J(P),$$

oraus wegen (19) die zu beweisende Ungleichung (29) folgt.

Da ferner $\sum_{\nu}{}' \sigma_\nu$ von P überdeckt wird, so ist

$$\underline{J} \sum_{\nu}{}' \sigma_\nu \leqq \underline{J}(P).$$

Endlich muß jeder Punkt A von $[P]_\varepsilon$ wegen b) in mindestens einer unktmenge σ_ϱ vorkommen. Wegen a) und der Definitionseigenschaft on $[P]_\varepsilon$ kann dann die Punktmenge σ_ϱ keinen Punkt von G enthalten. ie Punktmenge σ_ϱ muß mithin, da sie den zu P gehörigen Punkt A nthält, wegen X nur aus Punkten von P bestehen, d. h. in $\sum_{\nu}{}' \sigma_\nu$ vor-ommen. Also wird $[P]_\varepsilon$ von $\sum_{\nu}{}' \sigma_\nu$ überdeckt, und es ist wegen V

$$J \sum_{\nu}{}' \sigma_\nu \geqq \underline{J}[P]_\varepsilon.$$

Aus den beiden letzten Ungleichungen und (32) ergibt sich

$$\underline{J}(P) \geqq \sum_{\nu}' J(\sigma_\nu) \geqq \underline{J}[P]_\varepsilon,$$

woraus wegen (23) die zu beweisende Ungleichung (30) folgt.

§ 3.

Bestimmung des Inhaltes einiger Elementarfiguren.

Bei den nachfolgenden Sätzen tritt die Schlußweise klarer hervor, wenn statt der Ebene der Raum zugrunde gelegt wird. Sie gelten natürlich wie alles Bisherige ohne jede Weiterung für beliebig viele Dimensionen.

XVIII. Es sei L eine in einer Ebene gelegene beschränkte Punktmenge. Man trage in jedem Punkte von L in einer festen nicht in die Tragebene von L fallenden Richtung die Strecke l ab. Die aus allen Punkten dieser Strecken bestehende räumliche Punktmenge heiße eine „Säule", L — ihre Basis, die Länge des vom Endpunkt einer der Strecken l auf die Basisebene gefällten Lotes — ihre Höhe.

Es sei nun eine senkrechte Säule S mit der Basis L und der Höhe h gegeben. Es mögen $\bar{J}_2(L)$ und $\underline{J}_2(L)$ den ebenen äußeren und inneren Inhalt von L, $\bar{J}_3(S)$ und $\underline{J}_3(S)$ den räumlichen äußeren und inneren Inhalt von S bezeichnen. Dann ist

$$\bar{J}_3(S) = h \cdot \bar{J}_2(L), \tag{33}$$

$$\underline{J}_3(S) = h \cdot \underline{J}_2(L). \tag{34}$$

Beweis. Man zerlege den Raum zwischen der Basisebene und der in der Entfernung h über ihr ausgebreiteten Parallelebene durch drei zueinander orthogonale Scharen äquidistanter Parallelebenen in ein Würfelnetz mit der Kante $\frac{h}{n}$, so daß die Basisebene und die eben genannte Parallelebene die unterste und oberste Ebene der einen Schar von Zerlegungsebenen werden.

Nun wende man zur Berechnung von $\bar{J}_2(L)$ und $\underline{J}_2(L)$ den Satz XVII an, indem man als Punktmengen σ_ν diejenigen Würfelgrundflächen wähle, welche in die Basisebene fallen und Punkte von L enthalten. Ihre Anzahl sei N, während N' die Anzahl derjenigen von ihnen sei, welche nur aus Punkten von L bestehen. Dann ergibt sich

$$\bar{J}_2(L) = \lim_{n=\infty} N\left(\frac{h}{n}\right)^2, \tag{35}$$

$$\underline{J}_2(L) = \lim_{n=\infty} N'\left(\frac{h}{n}\right)^2. \tag{36}$$

Zur Berechnung von $\bar{J}_3(S)$ und $\underline{J}_3(S)$ wende man ebenfalls den Satz XVII
n, indem man als Punktmengen σ_ν diejenigen Netzwürfel wähle, deren senk-
echte Projektionen auf die Basisebene Punkte von L enthalten. Ihre An-
ahl ist offenbar nN, während die Anzahl derjenigen von ihnen, welche
ur aus Punkten von S bestehen, nN' ist. Es ergibt sich also

37) $$\bar{J}_3(S) = \lim_{n=\infty} nN\left(\frac{h}{n}\right)^3,$$

38) $$\underline{J}_3(S) = \lim_{n=\infty} nN'\left(\frac{h}{n}\right)^3.$$

us (35) und (37) folgt unmittelbar die zu beweisende Gleichung (33)
nd aus (36) und (38) die zu beweisende Gleichung (34).

XIX. Da man ein Parallelogramm durch Hinzufügen und Wegnehmen
ongruenter Dreiecke in ein Rechteck von gleicher Grundlinie und Höhe
erwandeln kann, so folgt gemäß XV, (15), (16), daß der Inhalt eines
arallelogramms gleich dem Produkt aus Grundlinie und Höhe ist.

XX. Da man ein Parallelepipedon, dessen eine Kante rechtwinklig
1 den beiden anderen steht, als rechtwinklige Säule über einem Parallelo-
ramm betrachten kann, so folgt aus den beiden vorigen Sätzen, daß das
olumen eines solchen Parallelepipedons gleich dem Produkt aus Grund-
äche und Höhe ist, wobei nachträglich jede der Begrenzungsflächen als
rundfläche gewählt werden kann.

XXI[2]). Es sei P eine beschränkte Punktmenge im Raum, E eine
bene, l eine gerichtete Gerade in E. Man verschiebe jeden Punkt des
aumes in der Richtung von l um $k \cdot d$, wo k eine Konstante und d die
ntfernung des Punktes von der Ebene E bedeutet. Dabei gehe P in P'
ber. Dann ist

$$\bar{J}(P) = \bar{J}(P'), \qquad \underline{J}(P) = \underline{J}(P').$$

Beweis. Man zerlege den Raum in ein Würfelnetz, dessen Kanten
er Geraden l, der Senkrechten auf ihr in der Ebene E und dem Lot auf
er Ebene E parallel sind. Bei der Transformation geht dieses Netz in
n Netz von Parallelepipeden über, deren eine Kante senkrecht auf den
eiden anderen steht, und deren Volumen daher gemäß dem vorigen Satz
eich dem Volumen der entsprechenden Würfel ist.

Berechnet man nun den äußeren und inneren Inhalt von P mit Hilfe
s Satzes XVII, indem als σ_ν Netzwürfel gewählt werden, und den äußeren
nd inneren Inhalt von P', indem als σ_ν die entsprechenden Netzparallel-

[2]) Diesen Transformationssatz in Verbindung mit dem Transformationssatz XXIII
t Carathéodory dem Aufbau der Inhaltslehre in seinen „Vorlesungen über reelle
nktionen“ zugrunde.

epipeda gewählt werden, so ergibt sich unmittelbar die zu beweisende Behauptung.

XXII. Da eine schiefe Säule aus einer senkrechten mit derselben Grundfläche und gleicher Höhe durch eine Transformation von der im vorigen Satz definierten Art erzeugt werden kann, so folgt aus diesem Theorem, daß das äußere und innere Volumen einer schiefen Säule gleich dem Produkt aus der Höhe und dem äußeren resp. inneren Inhalt der Grundfläche sind.

Insbesondere ist also auch das Volumen eines beliebigen Parallelepipedons gleich dem Produkt aus Höhe und Grundfläche.

XXIII. Es sei P eine beschränkte Punktmenge im Raume und E eine Ebene. Man verschiebe jeden Punkt des Raumes auf der durch ihn gehenden Senkrechten zur Ebene E in die k-fache Entfernung von E, wo k eine Konstante bedeutet. Dabei gehe P in P' über. Dann ist

$$\bar{J}(P') = k \cdot \bar{J}(P), \quad \underline{J}(P') = k \cdot \underline{J}(P).$$

Beweis. Man zerlege den Raum in ein Würfelnetz, dessen eine Ebenenschar parallel zur Ebene E ist. Bei der Transformation geht das Würfelnetz in ein Netz rechtwinkliger Parallelepipeda über, deren Volumen gemäß (16) gleich dem k-fachen Volumen der entsprechenden Würfel ist. Daraus folgt wie beim Beweise von XXI unter Anwendung des Satzes XVII die zu beweisende Behauptung.

XXIV. Aus dem vorigen Satze folgt leicht, daß, wenn die Punktmenge Q aus der Punktmenge P durch eine Ähnlichkeitstransformation mit dem Vergrößerungsverhältnis k hervorgeht,

$$\bar{J}(Q) = k^3 \bar{J}(P), \quad \underline{J}(Q) = k^3 \underline{J}(P)$$

ist.

XXV. Es sei die „Pyramide“ P gegeben, die man durch Verbindung eines Raumpunktes, der Spitze, mit allen Punkten einer beschränkten ebenen Punktmenge L, der Basis, erhält. h sei die Höhe der Pyramide. Dann ist

$$\bar{J}_3(P) = \frac{h \cdot \bar{J}_2(L)}{3}, \quad \underline{J}_3(P) = \frac{h \cdot \underline{J}_2(L)}{3}.$$

Beweis. Zerlegt man einen Würfel mit der Kante a vom Mittelpunkt aus in sechs kongruente Pyramiden mit der Grundfläche a^2 und der Höhe $\frac{a}{2}$, so folgt aus XVI, IV und (15), daß das Volumen jeder einzelnen Pyramide gleich

$$\frac{a^3}{6} = \frac{\frac{a}{2} a^2}{3} \tag{39}$$

t. Durch die Transformation XXI läßt sich nun jede Pyramide, deren rundfläche ein Quadrat mit der Seite a ist, in eine Pyramide mit demelben Quadrat als Grundfläche und von gleicher Höhe verwandeln, deren pitze senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche liegt. Durch die ransformation XXIII läßt sich dann die Spitze auf der Mittelsenkrechten die Entfernung $\frac{a}{2}$ von der Grundfläche rücken. Also folgt aus XXI, XIII und (39), daß das Volumen einer Pyramide mit der Höhe h und em Quadrate a^2 als Grundfläche gleich $\frac{h a^2}{3}$ ist.

Man zerlege nunmehr die Tragebene von L in ein Quadratnetz mit er Seite a und verbinde alle Quadrate mit der Spitze der Pyramide. ie so entstehenden Pyramiden haben das Volumen $\frac{h \cdot a^2}{3}$, lassen sich aber ei der Anwendung des Satzes XVII noch nicht als Punktmengen σ_r beutzen, da sie nicht in allen Erstreckungen mit a verschwinden. Um das u erreichen, durchschneide man sie mit einer Schar von Parallelebenen ur Tragebene von L. Dann erhält man bei Berücksichtigung von XVI nd (15) auf Grund von (29) und (30) leicht

$$\bar{J}_3(P) = \lim_{a=0} \frac{h}{3} \sum a^2, \qquad \underline{J}_3(P) = \lim_{a=0} \frac{h}{3} \sum' a^2,$$

o die erste Summe über alle Quadrate zu erstrecken ist, die Punkte on L enthalten, die zweite über alle, die nur aus Punkten von L beehen. Aus dieser Gleichung folgt die zu beweisende Behauptung.

§ 4.

Das mehrfache Integral.

Die Entwicklung des Begriffes des mehrfachen Integrals läßt sich auf iesem Standpunkt etwa folgendermaßen bequem durchführen.

Es sei die beschränkte Funktion $f(xy)$ in der beschränkten Punktenge L der xy-Ebene definiert. L habe einen bestimmten Inhalt und sei zunächst

$$f(xy) \geqq 0. \tag{40}$$

Man trage auf jedem Punkte von L die Strecke $f(xy)$ in der Richtung er positiven Z-Achse auf und bezeichne die aus allen Punkten dieser trecken bestehende Punktmenge mit P. Dann definiere man das obere nd untere Darbouxsche Integral von $f(xy)$ über L durch den äußeren nd inneren Inhalt von P.

Ist die Bedingung (40) nicht erfüllt, so wähle man die Konstante c so, daß

$$f_c(xy) = c + f(xy) \geqq 0$$

wird und definiere wie oben die Punktmenge P_c für die Funktion $f_c(xy)$. Dann sind das obere und das untere Integral von $f(xy)$ über L durch die Differenzen

$$\bar{J}_2(P_c) - cJ_2(L), \quad \underline{J}_2(P_c) - cJ_2(L)$$

zu definieren, und es ergibt sich aus (33), (34) leicht, daß diese Differenzen von der Wahl von c unabhängig sind.

Berlin, den 12. Oktober 1921.

(Eingegangen am 13. Oktober 1921.)

Notiz über einen Satz der Galoisschen Theorie.

Von

Alexander Ostrowski in Hamburg.

Durch den Hilbertschen Irreduzibilitätssatz wird nicht nur eine wesentliche und tiefliegende Eigenschaft irreduzibler Polynome in mehreren Variablen aufgedeckt, sondern es werden durch ihn mehrere wichtige Probleme aufgeworfen, deren Erforschung als eine der vornehmsten Aufgaben der modernen Algebra und Zahlentheorie gelten darf. Insbesondere gehört hierher das Problem, die Beziehung des Begriffes der absoluten Irreduzibilität zum gewöhnlichen Irreduzibilitätsbegriff aufzuklären, eine Beziehung, die bereits in den Hilbertschen Irreduzibilitätssatz hineinspielt, ohne jedoch, bei dem von Hilbert gewählten Beweisgang — und auch bei allen späteren Beweisen — klar zutage zu treten. Als einen Beitrag zur Untersuchung dieser Frage möchte ich nun im Folgenden einen Satz der Galoisschen Theorie beweisen, der bisher unbemerkt geblieben zu sein scheint, und in dem der wesentliche Unterschied zwischen der gewöhnlichen und der absoluten Irreduzibilität in helles Licht gerückt wird. Der Formulierung und dem Beweis dieses Satzes in § 2 schicke ich in § 1 einige allgemeinere Betrachtungen voraus über die Normierung von Koeffizienten bei Teilern von Polynomen mit Koeffizienten aus einem bestimmten Körper, die trotz ihres durchaus elementaren Charakters wohl jedesmal von Bedeutung sein können, wenn es sich um die Frage handelt, wie die Adjunktion von algebraischen Größen den Irreduzibilitätscharakter eines Polynoms beeinflußt.

§ 1.

Es sei $F(x_1, \ldots, x_n)$ ein Polynom in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$, und Ω sei der kleinste seine Koeffizienten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ enthaltende Körper durch Ω bezeichnet. Es zerfalle F in ein Produkt von zwei Polynomen $A(x_1, \ldots, x_n)$ und $B(x_1, \ldots, x_n)$ mit Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ bzw. $\beta_1, \beta_2, \ldots$.

Diese Koeffizienten sind natürlich nur bis auf eine multiplikative Größe bestimmt, so daß wir allgemeiner auch

$$(1) \qquad t\alpha_1, t\alpha_2, \ldots \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{t}\beta_1, \frac{1}{t}\beta_2, \ldots$$

als Koeffizienten von A und B annehmen könnten. — Alle Zerlegungen, die man so für verschiedene t erhält, werden wir *ähnliche* Zerlegungen nennen. — Dagegen sind die Produkte $\alpha_i\beta_k$ von t unabhängig. Es sei der kleinste alle α_i enthaltende Körper durch A, der kleinste alle β_k enthaltende Körper durch B, der kleinste alle Produkte $\alpha_i\beta_k$ enthaltende Körper durch T bezeichnet. Den kleinsten, beide Körper R und A enthaltenden Körper, der ja nicht mit A übereinzustimmen braucht, bezeichnen wir durch A′, den entsprechenden kleinsten Körper, der R und B enthält, durch B′. Dann ist B ein Teiler von A′, da B aus F und A durch rationale Operationen hervorgeht. Daher ist B′ ein Teiler von A′, A′ ein Teiler von B′, also $A' = B'$. Da in $A' = B'$ alle Produkte $\alpha_i\beta_k$ liegen, ist T ein Teiler von A′. Andererseits sind alle Koeffizienten von F in T enthalten, also ist R ein Teiler von T, so daß $A' = B'$ auch definiert werden kann als der kleinste Körper, in dem A und B liegen, also als der kleinste Körper, in dem die Zerlegung $F = AB$ gilt. Andererseits gibt es bereits in T eine ähnliche Zerlegung. Denn wählen wir in (1) für t etwa einen nicht verschwindenden Koeffizienten β_1 von B, so werden die Größen (1) zu

$$\beta_1\alpha_1, \beta_1\alpha_2, \ldots \quad \text{und} \quad \frac{\beta_1}{\beta_1} = 1, \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\beta_2\alpha_1}{\beta_1\alpha_1}, \frac{\beta_3}{\beta_1} = \frac{\beta_3\alpha_1}{\beta_1\alpha_1}, \ldots,$$

wenn $\alpha_1 \neq 0$ ist, d. h. Größen von T. T ist also der kleinste Körper, in dem eine ähnliche Zerlegung stattfindet. *Wir sehen außerdem, daß alle Koeffizienten von A und B gewiß in T liegen, d. h. die Zerlegung im kleinstmöglichen Körper stattfindet, wenn einer von diesen Koeffizienten gleich* 1 *ist.* (Es genügt aber allgemeiner, daß wenigstens einer der Koeffizienten von A oder B in R oder noch allgemeiner in T liegt.)

Dieser Körper T kann sich indessen noch ändern, wenn wir F mit irgendeiner Größe t multiplizieren, also die Koeffizienten von F durch

$$t\gamma_1, t\gamma_2, \ldots$$

ersetzen, da sich dann auch alle Produkte $\alpha_i\beta_k$ mit t multiplizieren. Die Quotienten $\frac{\alpha_i\beta_k}{\alpha_{i'}\beta_{k'}}$ sind jedoch von t unabhängig, und der kleinste sie enthaltende Körper T' ist daher in allen, verschiedenen t entsprechenden Körpern T enthalten. Es läßt sich aber t so wählen, daß der entsprechende Körper T mit T' zusammenfällt. Denn wenigstens ein Koeffizient von F, etwa γ_1, ist gleich dem Produkt eines Koeffizienten von A und eines

on B, etwa $\alpha_1 \beta_1$. Wählen wir also für t einfach $\frac{1}{\gamma_1}$, so multiplizieren ch alle $\alpha_i \beta_k$ mit $\frac{1}{\alpha_1 \beta_1}$, und T geht in T' über. Die Koeffizienten , $\gamma_2, \ldots$ von F werden aber zu

$$1, \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \frac{\gamma_3}{\gamma_1}, \ldots,$$

er Körper R zu dem kleinsten Körper $\bar{R}$, der alle Verhältnisse $\frac{\gamma_i}{\gamma_k}$ entält. Machen wir einen anderen Koeffizienten von F zu 1, so multiizieren sich alle $\alpha_i \beta_k$ mit einem Quotienten $\frac{\gamma_i}{\gamma_1}$, der zu $\bar{R}$, also auch zu $'$ gehört, und der Körper T bleibt unverändert.

Wir erreichen also gewiß, daß der Körper T der kleinstmögliche ird, wenn wir einen der Koeffizienten von F gleich 1 *machen.*

Wir wollen daher von nun an annehmen, daß bei allen Polynomen, e wir betrachten, die Koeffizienten gewisser Glieder gleich 1 sind, nämch die Koeffizienten des höchsten Gliedes bei irgendeiner willkürlichen er festen Anordnung der Variablen. Offenbar ist das Produkt von zwei normierten Polynomen ebenfalls normiert.

§ 2.

Es sei nun R irgend ein algebraischer Zahlkörper. Ist F ein von den nbestimmten $u, u_1, \ldots, u_m$ abhängiges Polynom mit algebraischen Koffizienten, und zerfällt F in ein Produkt von zwei Polynomen in $u, u_1, \ldots, u_m$ it *beliebigen* Zahlenkoeffizienten, so müssen bekanntlich diese Koeffizienten *lgebraische* Zahlen sein. Denn führen wir die Kroneckersche Substiution $u = x$, $u_1 = x^g$, $u_2 = x^{g^2}$, $\ldots$, $u_m = x^{g^m}$ mit hinreichend großem g us, so geht jeder Faktor von F in ein Polynom in x mit denselben oeffizienten über, die Koeffizienten eines Faktors eines Polynoms in x it algebraischen Koeffizienten sind aber, wenn einer unter ihnen gleich ist, ebenfalls algebraische Zahlen. Ist also F nicht in zwei Faktoren it algebraischen Zahlenkoeffizienten zerlegbar, so ist F überhaupt unrlegbar, auch wenn man *alle* Zahlen als Koeffizienten zuläßt.

Man nennt nun ein Polynom in $u, u_1, \ldots, u_m$ mit algebraischen ahlenkoeffizienten bekanntlich absolut irreduzibel, wenn es sich nicht als rodukt von zwei Polynomen in $u, u_1, \ldots, u_m$ mit algebraischen Zahlenoeffizienten darstellen läßt. — Der Begriff der absoluten Irreduzibilität irrte von Kronecker herrühren. —

Es sei nun $F(u; u_1, \ldots, u_m)$ ein in R irreduzibles Polynom mit ahlenkoeffizienten aus R vom Grade n in bezug auf u. Es sei dann ζ ne Wurzel der Gleichung $F(u; u_1, \ldots, u_m) = 0$, wenn u als Unbekannte

betrachtet wird. Ist F selbst noch nicht absolut irreduzibel, so enthält es sicher ein absolut irreduzibles Polynom $\varphi(u; u_1, \ldots, u_m)$ als Faktor, dessen Wurzel — in bezug auf u — ζ ist. Wir bezeichnen den aus allen algebraischen *Zahlen*, die im Körper $R(\zeta; u_1, \ldots, u_m)$ vorkommen, gebildeten Körper durch K_1. Es gilt nun das

Theorem. *Im Körper $K_1(u_1, \ldots, u_m)$ sondert sich von $F(u; u_1, \ldots, u_m)$ jedenfalls derjenige absolut irreduzible Faktor $\varphi(u; u_1, \ldots, u_m)$ ab, dessen Wurzel ζ ist, und jeder Zahlkörper, in dem sich von $F(u; u_1, \ldots, u_m)$ der Faktor φ absondert, enthält K_1 als Unterkörper. Mit anderen Worten: Der durch die algebraischen Zahlenirrationalitäten, die in den Koeffizienten von $\varphi(u)$ vorkommen, bestimmte Zahlkörper K_2 ist mit dem Zahlkörper K_1 identisch, der durch alle im Körper $R(\zeta; u_1, \ldots, u_m)$ enthaltenen Zahlenirrationalitäten bestimmt wird*[1]).

Der Satz läßt sich auf mehrere Arten beweisen, wohl am einfachsten wie folgt:

Bildet man die Norm $N(\varphi)$ von φ in K_2, so besteht sie aus lauter voneinander verschiedenen Faktoren, die sich auch nicht bloß durch multiplikative Konstanten voneinander unterscheiden, da in ihnen die Koeffizienten bei einem gewissen Glied gleich 1 sind. F muß daher durch $N(\varphi)$ teilbar sein, da F durch φ teilbar ist. Da aber $N(\varphi)$ Koeffizienten aus R hat, und F irreduzibel in R ist, müssen die Polynome F und $N(\varphi)$ miteinander identisch sein, weil in ihnen die Koeffizienten bei einem gewissen Glied gleich sind, nämlich gleich 1. Wir erhalten die Gleichung:

$$F(u; u_1, \ldots, u_m) = N(\varphi(u; u_1, \ldots, u_m)). \tag{2}$$

Es seien nun die Grade von F und φ in bezug auf u durch n und n' bezeichnet. Dann genügt ein primitives Element ϱ von K_2 einer in R irreduziblen Gleichung $\omega(z) = 0$ vom Grade $\bar{n} = \frac{n}{n'}$, wie aus (2) durch Vergleichung der Grade in bezug auf u folgt. Die Gleichung $F(u) = 0$ ist also eine sogenannte *imprimitive* Gleichung im Körper $\Omega = R(u_1, \ldots, u_m)$. Daher ergibt sich unsere Behauptung aus dem folgenden Hilfssatz: *Ist eine Gleichung $F(u) = 0$ vom Grade n in bezug auf einen Körper Ω imprimitiv, und genügt etwa eine Wurzel ζ von F einer im Körper $\Omega(\varrho)$ irreduziblen Gleichung $\varphi(u, \varrho) = 0$ vom Grade n', wo ϱ eine Wurzel der in Ω irreduziblen Gleichung $\omega(z) = 0$ vom Grade $\bar{n}$ und $n'\bar{n} = n$ ist, so liegt ϱ im Körper $\Omega(\zeta)$.* In der Tat gilt unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes die Gleichung:

$$F(u) = N(\varphi(u, \varrho)) = \varphi(u, \varrho)\varphi(u, \varrho') \ldots \varphi(u, \varrho^{(\bar{n}-1)})$$

[1]) Ich habe diesen Satz bereits in meiner Mitteilung: „Zur arithmetischen Theorie der algebraischen Größen", Gött. Nachr. 1919, ausgesprochen, jedoch für den Beweis auf eine spätere Abhandlung verwiesen.

o $\varrho', \varrho'', \ldots$ die zu ϱ konjugierten Größen sind. Die mit $\varphi(u, \varrho)$ konugierten Polynome $\varphi(u, \varrho')$, $\varphi(u, \varrho'')$, ... usw. können dann nur für on ζ verschiedene Wurzeln von F verschwinden, so daß der Gleichung $(\zeta, z) = 0$ nur eine einzige von den Wurzeln von $\omega(z) = 0$ genügt, ämlich ϱ. Daher läßt sich ϱ aus den Gleichungen $\varphi(\zeta, z) = 0$ und $(z) = 0$ als deren einzige gemeinsame Wurzel mit Hilfe des Euklidischen lgorithmus rational durch ζ ausdrücken, wenn man, was ja stets möglich t, $\varphi(u, \varrho)$ als ein Polynom in ϱ dargestellt hat.

Der hiermit bewiesene Satz läßt sich offenbar insofern etwas allemeiner fassen, als der Körper R nicht als Zahlkörper angenommen zu erden braucht. Er kann auch algebraische Funktionen von Unbestimmten nthalten, von denen natürlich die Unbestimmten u_i unabhängig sein üssen. Man kann für R allgemeiner jeden abstrakten Körper mit der harakteristik 0 (nach der Steinitzschen Terminologie) setzen.

Unser Satz hat eine gewisse Ähnlichkeit mit einem bekannten Satze on Kronecker, nach welchem jede Reduktion der Galoisschen Gruppe ner Gleichung, die durch Adjunktion einer algebraischen Irrationalität ewirkt wird, bereits durch Adjunktion einer natürlichen Irrationalität zu ewirken ist, die im zur Gleichung zugehörigen Galoisschen Bereich liegt. er Unterschied besteht darin, daß in unserem Falle die zur Abspaltung nes absolut irreduziblen Faktors notwendige Irrationalität sich nicht ur durch *alle* Wurzeln der Gleichung rational ausdrücken läßt, sondern ereits durch *eine* Wurzel des abzuspaltenden Faktors.

In unserem Satze ist insbesondere ein bekannter und oft benutzter atz enthalten: Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ algebraische Irrationalitäten in beug auf einen Körper R. Man fasse sie mit Hilfe verschiedener Potenzodukte $U_1, \ldots, U_k$ neuer Unbestimmter $u_1, \ldots, u_m$ zu einem Ausdruck $= \sum_1^k \alpha_i U_i$ zusammen. Dann läßt sich jede Irrationalität α_i rational it Koeffizienten aus R durch $U, u_1, \ldots, u_m$ ausdrücken.

Denn genügt U in bezug auf $R(u_1, \ldots, u_m)$ einer Gleichung ν-ten rades

$$F(U; u_1, \ldots, u_m) = 0,$$

ist zur Abspaltung des absolut irreduziblen Bestandteiles $U - \sum_1^k \alpha_i U_i$, der Koeffizient von U gleich 1 ist, die Adjunktion sämtlicher α_i notwendig.

Bei dem Beweis unseres Satzes hat sich ergeben, daß der Grad $\overline{n}$ s Körpers K_2 ein Teiler des Grades n von F in bezug auf u ist. Da er K_2 durch die Koeffizienten von φ eindeutig bestimmt ist, kann für jede im Polynom F vorkommende Variable genommen werden, und r erhalten die Sätze:

1. *Der Grad n des kleinsten zur Abspaltung eines absolut irreduziblen Faktors eines in bezug auf R irreduziblen Polynoms F ausreichenden Zahlkörpers ist ein gemeinsamer Teiler der Grade von F in bezug auf die in F vorkommenden Variablen.*

2. *Ein in R irreduzibles Polynom ist zugleich auch absolut irreduzibel, wenn der größte gemeinsame Teiler der Grade von F in bezug auf die in F vorkommenden Variablen gleich* 1 *ist.*

Diese Sätze sind aber nur spezielle Folgerungen aus einem wesentlich allgemeineren Satze, den ich in einem anderen Zusammenhange veröffentlichen werde.

Hamburg, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 8. Oktober 1921.)

Über die Zerfällung rationaler Zahlen in rationale Polynomwerte.

Von

E. Kamke in Hagen i. W.

Bei der am bekanntesten gewordenen, zuerst durch Herrn Hilbert ewiesenen, Behauptung von Waring[1])

„Zu jeder ganzen Zahl $n \geqq 2$ gibt es eine ganze positive Zahl $N = N(n)$, so daß jede ganze Zahl $z \geqq 0$ in N n-te Potenzen ganzer Zahlen $x_\varkappa \geqq 0$

$$z = \sum_{\varkappa=1}^{N} x_\varkappa^n$$

zerfällbar ist"

t zugleich mit dieser auch die dadurch entstehende neue Behauptung ewiesen, daß die gesperrt gedruckten Worte *„ganz"* ersetzt werden urch *„rational"*. Denn ist z rational mit dem Nenner ζ, so ist $z\zeta^n$ ganz, so

$$z\zeta^n = \sum_{\varkappa=1}^{N} x_\varkappa^n, \quad \text{und daher} \quad z = \sum_{\varkappa=1}^{N} \left(\frac{x_\varkappa}{\zeta}\right)^n$$

it ganzen Zahlen $x_\varkappa \geqq 0$.

Anders ist es bei einem zweiten im Anschluß an den obigen ebenfalls on Waring behaupteten allgemeineren Satz, der von mir in folgender assung bewiesen ist[2]):

Es sei

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu \qquad (n \geqq 2)$$

[1]) Literaturangaben über diesen Waring-Hilbertschen Satz finden sich z. B. des Verfassers Dissertation: *Verallgemeinerungen des Waring-Hilbertschen Satzes* [Math. Ann., 83 (1921), S. 85–112].

[2]) Math. Ann., a. a. O.

ein Polynom mit rationalzahligen Koeffizienten a_ν und mit $a_n > 0$; ferner sei $f(x)$ stets eine ganze Zahl, wenn x ganz ist; dann ist unter Hinzunahme einer beschränkten Anzahl von Einheiten jede positive ganze Zahl in eine beschränkte Anzahl nichtnegativer Polynomwerte mit ganzzahligem $x \geqq 0$ zerfällbar; d. h. es gibt eine nur von $f(x)$ abhängende positive ganze Zahl N und zu jeder positiven ganzen Zahl $z > 0$ solche ganzen Zahlen $N' \geqq 0$, $N'' \geqq 0$, $x_1 \geqq 0, \ldots, x_{N'} \geqq 0$, daß

$$z = \sum_{\varkappa=1}^{N'} f(x_\varkappa) + N'', \quad N' + N'' \leqq N$$

ist und die $f(x_\varkappa) \geqq 0$ sind[3]).

Dieser Satz über die Zerfällbarkeit ganzer Zahlen soll im folgenden auf rationale Zahlen übertragen werden. Es wird sich dabei die bemerkenswerte Tatsache ergeben, daß dann ein N'' nicht vorkommt und daß als N' *eine nur von n, nicht aber von den Koeffizienten des Polynoms abhängende Zahl* gewählt werden kann.

Hilfssatz. *Zu jeder ganzen Zahl $n \geqq 2$ gibt es eine positive ganze Zahl $N = N(n)$ und Zahlen j_ν, J_ν $(0 < j_\nu < J_\nu$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n)$, so daß für jede positive Zahl s und je n rationale Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_n$, welche die Ungleichungen*

$$j_\nu s^\nu < r_\nu < J_\nu s^\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

erfüllen, die n Gleichungen

$$r_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{N} y_\varkappa^\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

simultan durch rationale Zahlen $y_\varkappa \geqq 0$ lösbar sind; d. h. daß die r_ν simultan in eine feste Anzahl von ν-ten Potenzen rationaler Zahlen zerfällbar sind.

Beweis. Dieser Hilfssatz folgt unmittelbar aus einem von mir bewiesenen Satz[4]) über die simultane Zerfällung *ganzer* Zahlen, der folgendermaßen lautet:

---

[3]) Für $N' = 0$ bedeute die Summe den Wert 0.

[4]) Math. Ann., a. a. O., S. 89. Dieser Satz ist dort als *Kernsatz* bezeichnet und allerdings insofern nicht das genaue Analogon zu dem oben formulierten Hilfssatz, als bei dem Kernsatz die Intervallgrenzen der darstellbaren Zahlen von der durch die 1. Potenzen darzustellenden Zahl l_1 abhängen, sich also mit dieser ändern, während bei dem Hilfssatz das nicht der Fall ist, vielmehr alle darzustellenden Zahlen einschließlich r_1 innerhalb gewisser, von einer anderen Zahl s abhängiger, Intervalle variieren dürfen. Diese kleine, oben mitbewiesene, Verallgemeinerung der Formulierung ist für das Folgende nötig.

Für jede ganze Zahl $n \geqq 2$ gibt es eine positive ganze Zahl $N = N(n)$, eine positive ganze Zahl A und reelle Zahlen i_1 und $i_\nu, I_\nu (0 < i_\nu < I_\nu)$ für $\nu = 2, \ldots, n$, so daß für je n durch A teilbare ganze Zahlen $l_1, \ldots, l_n$, welche die Ungleichungen

$$l_1 > i_1; \quad i_\nu l_1^\nu < l_\nu < I_\nu l_1^\nu \qquad (\nu = 2, \ldots, n)$$

erfüllen, die n Gleichungen

$$l_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{N} x_\varkappa^\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

simultan durch ganze Zahlen $x_\varkappa \geqq 0$ lösbar sind.

Zu den nach diesem Satz existierenden Zahlen i_ν, I_ν gibt es nämlich offenbar zwei positive Zahlen j_1, J_1, so daß

$$1 < \frac{J_1}{j_1} < \operatorname*{Min}_{\nu=2,\ldots,n} \sqrt[\nu]{\frac{I_\nu}{i_\nu}}$$

ist. Es werde ferner

$$j_\nu = i_\nu J_1^\nu; \quad J_\nu = I_\nu j_1^\nu \qquad (\nu = 2, \ldots, n)$$

gesetzt, so daß also $J_\nu > j_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ ist.

Sind nun $r_1, \ldots, r_n$ irgend n rationale Zahlen, die für irgendein positives s die Ungleichungen

$$j_\nu s^\nu < r_\nu < J_\nu s^\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

erfüllen, so werde $r_\nu = \frac{h_\nu}{k_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ gesetzt, wobei die h_ν, k_ν solche positiven ganzen Zahlen seien, daß die h_ν sämtlich durch A teilbar sind; ferner werde $K = k_1 \cdots k_n k^*$ gesetzt, wo k^* eine so große positive ganze Zahl bedeuten soll, daß $r_1 K > i_1$ ist. Dann sind die $r_\nu K^\nu = l_\nu$ sämtlich durch A teilbare positive ganze Zahlen, und es ist

$$i_\nu l_1^\nu = j_\nu K^\nu \frac{r_1^\nu}{J_1^\nu} < j_\nu K^\nu s^\nu < r_\nu K^\nu < J_\nu K^\nu s^\nu < J_\nu K^\nu \frac{r_1^\nu}{j_1^\nu} = I_\nu l_1^\nu.$$

Die Zahlen l_ν erfüllen also die Bedingungen des angeführten Satzes; daher gibt es ganze Zahlen $x_\varkappa \geqq 0$, so daß

$$r_\nu K^\nu = \sum_{\varkappa=1}^{N} x_\varkappa^\nu, \quad \text{also} \quad r_\nu = \sum_{\varkappa=1}^{N} \left(\frac{x_\varkappa}{K}\right)^\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

ist, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Satz. *Zu jeder ganzen Zahl $n \geqq 2$ gibt es eine positive ganze Zahl $N = N(n)$ von folgender Art: Für jedes Polynom n-ten Grades*

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$$

mit rationalen Koeffizienten, mit $a_n > 0$ und mit mindestens einer reellen Nullstelle ist die Gleichung

$$R = \sum_{\varkappa=0}^{N} f(x_\varkappa)$$

für jedes rationale $R > 0$ durch rationale Zahlen $x_\varkappa$ lösbar, für welche die $f(x_\varkappa) > 0$ sind; d. h. jede positive rationale Zahl ist in eine nur vom Grad des Polynoms abhängige Anzahl von positiven rationalen Polynomwerten zerfällbar.

Beweis. Es mögen N, j_ν, J_ν die im Hilfssatz angegebene Bedeutung haben (diese Zahlen sind also nur durch n bestimmt und unabhängig von den Koeffizienten des Polynoms); es sei R irgendeine gegebene positive rationale Zahl; es sei x_0 eine rationale Zahl, so daß $0 < f(x_0) < R$ und für die größte reelle Lösung ξ der Gleichung

$$(Q =) R - f(x_0) = N \cdot f(\xi)$$

$f(\xi) > 0$ ist. Diese Zahlen bleiben im Verlaufe des Beweises fest.

Zu Q, ξ und $f(x)$, d. h. zu R und f gibt es, da $f(\xi) > 0$ ist, eine solche positive Zahl[5]) $\eta_1 = \eta_1(R, f)$, daß für jedes u, welches die Ungleichungen $0 < \xi - u < \eta_1$ erfüllt, $f(u) > 0$ und $f'(u) > \varepsilon(\eta_1) > 0$ ist. Für derartige rationale u werde

$$F_u(y) = F(x - u) = f(x) - f(u),$$
$$A_\nu = A_\nu(u) = \frac{f^{(\nu)}(u)}{\nu!} \tag{1}$$

gesetzt, so daß auch

$$F_u(y) = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu y^\nu$$

ist. Dann sind in $F_u(y)$ die (von u abhängenden) Koeffizienten rational, und es ist $A_1 > \varepsilon > 0$. Ferner ist $y \geqq 0$ gleichbedeutend mit $x \geqq u$, hat also $f(x) > 0$ zur Folge auf Grund der Bestimmung von η_1 und ξ.

Nach dem Hilfssatz ist nun

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_\nu r_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\varkappa=1}^{N} A_\nu y_\varkappa^\nu = \sum_{\varkappa=1}^{N} F_u(y_\varkappa)$$

mit rationalen $y_\varkappa \geqq 0$ für jedes $s > 0$ und alle rationalen r_ν, die den Ungleichungen

$$j_\nu s^\nu < r_\nu < J_\nu s^\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{2}$$

[5]) Die Abhängigkeit einer Zahl von R und $f(x)$ wird in diesem Beweise nur dann zum Ausdruck gebracht, wenn betont werden soll, daß jene Zahl *nur* von R und $f(x)$ abhängt, wobei von Willkürlichkeiten bei der speziellen Auswahl abgesehen wird.

nügen. Es werde für $0 < \xi - u < \eta_2$ die untere Grenze von

$$A_1(u) = a_1 + 2a_2 u + \ldots + n a_n u^{n-1}$$

t g, die obere Grenze mit G bezeichnet. Dann gibt es ein $= \eta_3(R, f) < \eta_1$, so daß $\frac{g}{G} > \frac{j_1}{J_1}$ für $0 < \xi - u < \eta_2$ ist. Wird nun $j_1 = j$, $g J_1 = J$ gesetzt, so ist $0 < j < J$, und diese Zahlen hängen nur n R und f ab; ferner ist, falls $A_1 r_1 = r$ gesetzt wird, r_1 mit r rational d mit

$$js < r < Js$$

ch (2) für $\nu = 1$ erfüllt. Die rationale Zahl

$$L(s, u) = \sum_{\nu=2}^{n} A_\nu r_\nu$$

unabhängig von r_1 und A_1 und auf Grund der Kenntnis von s und u ein[6]) wählbar. Ferner gibt es wegen (1), $0 < \xi - u < \eta_2(R, f)$ und) eine Zahl $M = M(R, f)$, für die bei $0 < s < 1$

$$|L(s, u)| < s^2 M$$

Damit ist vorläufig bewiesen: Zu R und $f(x)$ gibt es solche Zahlen J, η_3 und M, daß für jedes rationale u des Intervalls $0 < \xi - u < \eta_3$ d für jedes $0 < s < 1$ eine rationale Zahl $L(s, u)$ mit

$$|L(s, u)| < s^2 M$$

rhanden ist derart, daß für jede unabhängig von dieser aus dem Intervall

$$js < r < Js$$

hlbare rationale Zahl r die Gleichung

$$r + L = \sum_{\varkappa=1}^{N} F_u(y_\varkappa)$$

rch rationale Zahlen $y_\varkappa \geqq 0$ lösbar ist.

Nun werde eine positive Zahl $\eta_3 = \eta_3(R, f) < \eta_2$ so gewählt, daß

$$Q - Nf(u) < \operatorname{Min}\left\{\frac{1}{2}(j + J);\ \frac{J^2 - j^2}{4M}\right\} \quad \text{für} \quad 0 < \xi - u < \eta_3$$

Ferner werde

$$s = \frac{2(Q - Nf(u))}{j + J}$$

setzt. Dann ist

$$0 < s < \operatorname{Min}\left\{1;\ \frac{J - j}{2M}\right\}$$

---

[6]) Man beachte Fußnote [5]).

und daher für jedes zu einem solchen s, u gehörige $L(s, u)$

$$js < \frac{1}{2}(j+J)s - Ms^2 < Q - Nf(u) - L(s,u) < \frac{1}{2}(j+J)s + Ms^2 < Js.$$

Für ein solches rationales u, das die Ungleichung $0 < \xi - u < \eta_3$ erfüllt, ist dann, da $r = Q - Nf(u) - L(s, u)$ die Ungleichung (3) erfüllt,

$$Q - Nf(u) = r + L(s,u) = \sum_{\varkappa=1}^{N} F_u(y_\varkappa)$$

mit rationalen $y_\varkappa \geqq 0$, also

$$R = f(x_0) + \sum_{\varkappa=1}^{N} \{F_u(y_\varkappa) + f(u)\} = \sum_{\varkappa=0}^{N} f(x_\varkappa)$$

mit rationalen $x_\varkappa \geqq u$ für $\varkappa > 0$, d. h. mit $f(x_\varkappa) > 0$; w. z. b. w.

(Eingegangen am 30. Mai 1921.)